MECANIQUE

M1 Cinématique du point

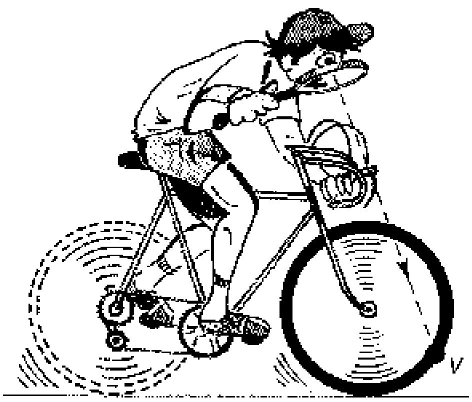
La cinématique décrit les mouvements des solides sans se préoccuper de leurs causes (c.à.d. des forces).

1 Repérage d'un point mobile

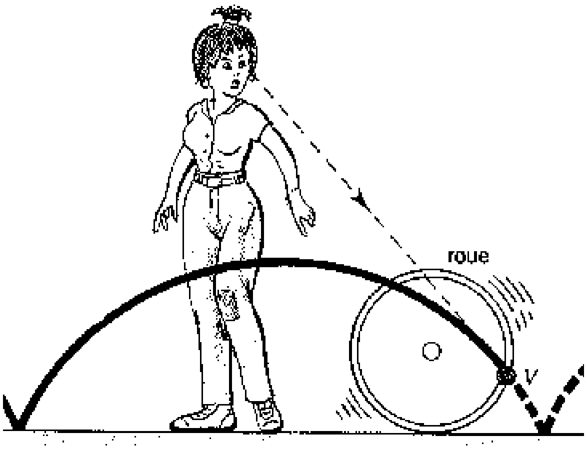
a) Caractère relatif du mouvement - nécessité d'un référentiel

Un corps mobile réel a toujours une certaine étendue. Il peut être considéré comme un ensemble de points matériels. Lors de l'étude d'un mouvement on peut être amené à décrire le mouvement d'un de ces points. (p.ex. la valve d'une bicyclette ou le centre de masse d’une bille qui tombe).

Trajectoire=ensemble des positions successives du point mobile.
La trajectoire dépend du solide de référence par rapport auquel les 2 observateurs étudient le mouvement. Le mouvement est *relatif*:



Dans le référentiel du cycliste, la valve V décrit une trajectoire circulaire



Dans le référentiel du sol, la valve V décrit une courbe appelée cycloïde

Pour décrire le mouvement d'un point, il faut préciser sa position à tout instant par rapport à un système de référence. On fixe:

(1) un *repère d'espace* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ permet d'exprimer à l'aide des vecteurs unitaire $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la position du point mobile M par rapport à l'origine de l'espace O. On imagine que ce repère soit attaché à un solide appelé *référentiel* (p.ex. repère du laboratoire, repère terrestre, repère géocentrique, repère héliocentrique, ...).

(2) un repère de temps qui permet de déterminer les *dates t* par rapport à la date origine t_0=0 et les *durées* $\Delta t = t_2 - t_1$.

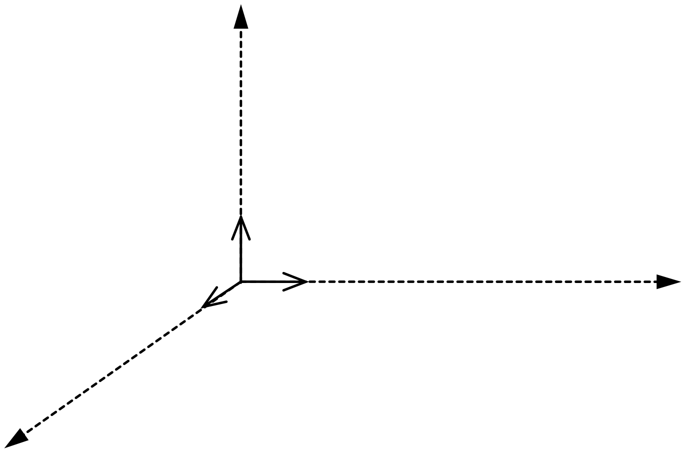
On physique on utilise généralement un *repère galiléen* qui ne doit pas subir lui même une accélération ni une rotation.

b) Position en coordonnées cartésiennes

A un instant t, la position d'un point mobile M par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est déterminé par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ norme: r=$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

resp. les coordonnées M (x,y,z)

Ex. 1: Compléter le repère indiqué et tracer le point M (4,5,3).



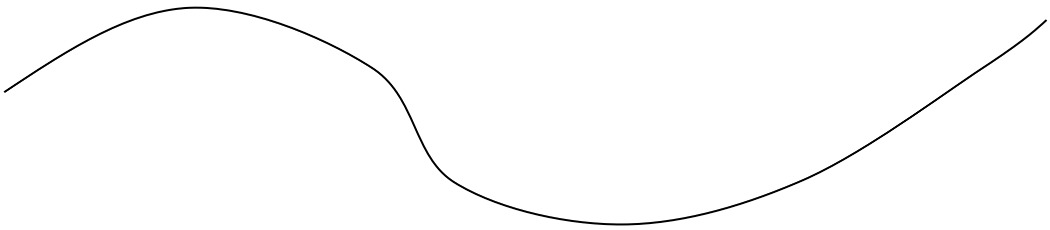
Puisque la position de M change au cours du mouvement, les coordonnées x,y,z sont des fonctions du temps. Les équations horaires x(t), y(t), z(t) donnent la position M(t) du mobile M à l'instant t.

Dans le cas d'un mouvement plan, on peut se contenter de deux coordonnées x,y.

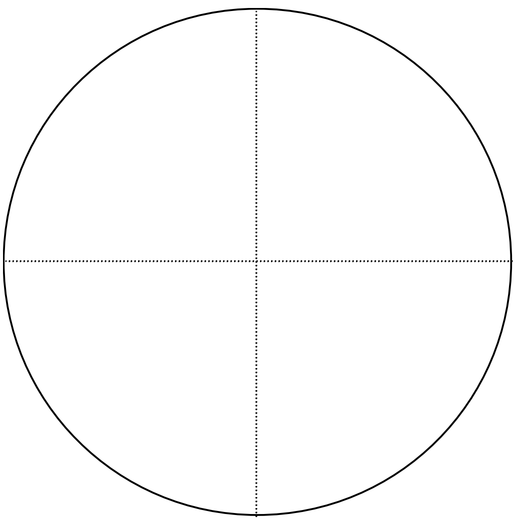
Ex. 2: On donne les équations paramétriques ou équations horaires de la trajectoire plane
$x(t)=4t$ (1)
$y(t)=6t^2+1$ (2)
a) Trouver l'équation cartésienne en éliminant le paramètre t.
b) Représenter la trajectoire.
c) Préciser les positions A à t=0s ; B à t=0,5s et C à t=1s. Déterminer les distances AB, BC et AC.
d) Qu'est-ce qui correspond au chemin suivi : la distance AC ou l'arc AC le long de la courbe ?

c) Position en abscisses curvilignes

Sur une trajectoire connue, munie d'une origine A et d'un sens + la position d'un mobile est défini par l'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{AM}$ (=longueur de l'arc AM mesuré le long de la courbe).



Application: Repérage d'un point sur une trajectoire circulaire de rayon R



Le point mobile M peut être repéré par son abscisse curviligne s = AM en m ou par son abscisse angulaire θ=(OA,OM) en rad

Les 2 grandeurs s et θ sont proportionnelles. Pour un tour: s=périmètre$=2\pi\cdot R$ (en mètre)
et $\theta=2\pi$ (en radian)

ainsi: $\frac{s}{\theta} = \frac{2\pi \cdot R}{2\pi} = R$

$\boxed{\text{Relation: } s=R\cdot\theta \quad \text{avec } \theta \text{ en radian!!}}$

2 Vitesse sur une trajectoire rectiligne

a) Définition de la vitesse algébrique moyenne

Dans le cas du mouvement rectiligne une seule coordonnée x suffit pour repérer le mobile M.

Pour apprécier la rapidité du mouvement d'un point mobile entre A (départ) et B (arrivée) on définit la **vitesse moyenne** par la formule

$$\boxed{v_m = \frac{\text{trajet total}}{\text{durée totale}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

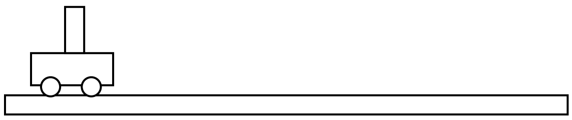
unité S.I.: v_m en m/s
signe suivant le **sens** du déplacement

Autre unité: $1\,\text{km/h} = \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{1}{3,6}\text{ m/s}$ 1 m/s = 3,6 km/h

<u>Expérience 1:</u> Un chariot roule avec très peu de frottement sur un rail. On lance le chariot de manière plus ou moins rapide et on mesure le trajet Δx et la durée du parcours Δt entre deux barrières lumineuses A et B.

Montage & Mesures :

Δx(m)			
Δt (s)			
V_m(m/s)			



b) Mesure de la vitesse instantanée

On observe que la vitesse peut varier en cours de route (p.ex. diminuer en montée et augmenter en descente). Pour mesurer la vitesse de passage en un point et date précis, on définit la **vitesse instantanée** par la formule :

$$\boxed{v = \frac{\text{petite portion de trajet}}{\text{petite durée}} = \frac{\partial x}{\partial t}}$$

unité S.I.: v en m/s
δ désigne une très petite variation Δ

<u>Expérience 2</u>: A l’aide d’un chronomètre spécial on mesure la durée de passage du fanion de largeur δx dans chaque barrière. On note δt_A et δt_B la durée d’obscurcissement en A resp. en B. Ceci permet de calculer la vitesse instantanée à l’entrée A et à la sortie B (cf. explications détaillées ci-dessous).

Montage & Mesures :

δx=0,029m

Δx(m)			
Δt (s)			
V_m(m/s)			
δt_A(s)			
v_A (m/s)			
δt_B(s)			
v_B (m/s)			

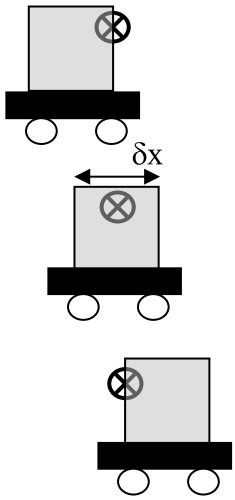
Si la vitesse est partout la même, on dit que le mouvement est uniforme. C'est le cas si une légère inclinaison du rail compense exactement les frottements.

En théorie on devrait prendre un intervalle de temps δt infiniment petit pour calculer la vitesse instantanée. Ceci peut s'appliquer si on connaît l'expression mathématique x=f(t) de l'équation horaire. Dans ce cas v=f '(t) c.à.d. la vitesse est la dérivée de x=f(t) (cf. cours de mathématique).

Dans des mesures expérimentales, la précision de mesure pour δx et δt ne permet pas le passage à l'infiniment petit.

Le trajet de mesure doit répondre à 2 conditions:
- être suffisamment petit pour que la vitesse v ne varie pas trop
- être suffisamment grand pour que δx et δt peuvent être mesurés avec une précision convenable.

(1) méthode avec barrière lumineuse



Habituellement la vitesse instantanée est calculée à partir du temps d'obscurcissement δt que provoque le passage d'un fanion de largeur δx dans la barrière photo-électrique.
L'illustration montre le **<u>même</u>** chariot à 3 instants différents :
1. à t-½·δt le fanion rentre dans la barrière.
2. à t le fanion se trouve au milieu
3. à t+½·δt le fanion ressort de la barrière lumineuse.

Il a ainsi parcouru la distance δx correspondant à la largeur du fanion pendant la durée δt. La valeur obtenue pour **<u>v instantanée</u>** correspond à la **<u>date t</u>** au milieu de l'intervalle de temps δt.

(2) méthode des positions successives

Une manière pour étudier le mouvement d'un mobile ponctuel est d'enregistrer sa position à des intervalles de temps réguliers τ. Pour déterminer la vitesse à l'instant t on considère la position qui précède et celle qui suit l'instant t.
Exemples : photos à flashs multiples, film, vibreur, étincelles, ...

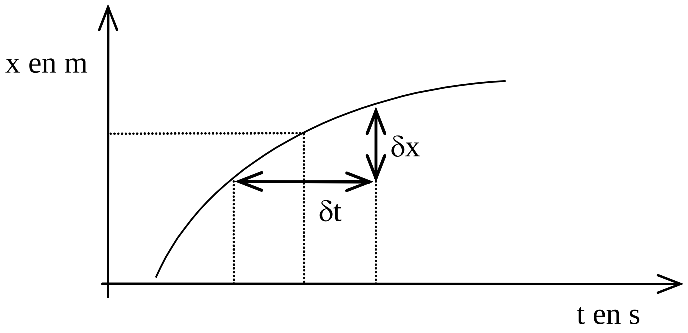
Exercice 3: Pour un corps en chute libre on repère sa position chaque τ= 0,05s. Calculer v à l'aide de la formule

$$v = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\tau}$$

t(s)	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
x(cm)	0,00	1,23	4,90	11,03	19,60	30,63	44,10	60,03
v(cm/s)								

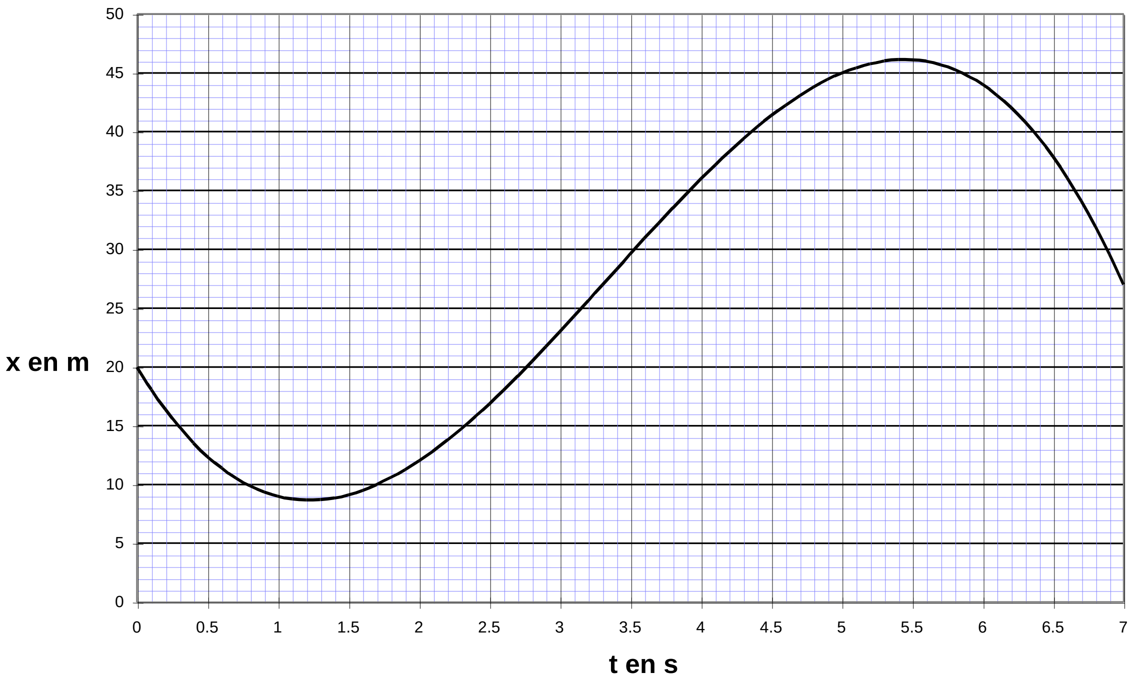
(3) méthode de l'enregistrement graphique x(t)

Surtout pour des mouvements de va-et-vient il est possible d'obtenir une représentation graphique de l'abscisse x en fonction du temps t. (Ex. pendule muni d'un crayon).
La vitesse correspond alors à la pente de la courbe chemin-temps.



$$\boxed{v = \frac{\delta x}{\delta t}}$$

Exerc. 4 :a) Déterminer graphiquement la vitesse instantanée aux instants: t=2s; t=6,5s
b) Quand est-ce que la vitesse s'annule? Que signifie v=0 pour la courbe x(t)?
c) Déterminer les intervalles de temps où la vitesse et positive resp. négative.
d) Que vaut la vitesse algébrique moyenne entre 0 et 7s?
e) Que vaut la vitesse en valeur absolue moyenne entre 0 et 7s?



(4) Méthode du tachymètre

Si le mobile entraîne un petit générateur électrique on obtient une tension électrique proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe du générateur et donc à la vitesse du mobile.
<u>Expérience 3</u> : Hélice liée à un générateur, tension proportionnel à la vitesse de rotation.

3 Accélération sur une trajectoire rectiligne

a) Définition de l'accélération algébrique moyenne et instantanée

On dit qu'un mouvement est uniforme, si la vitesse instantanée reste constante.
Si par contre la vitesse instantanée varie on parle d'un mouvement varié: accéléré (beschleunigt) ou décéléré (verzögert). Pour apprécier la variation de la vitesse au cours du temps, on définit:

l'accélération moyenne

$$a_m = \frac{\text{variation de vitesse}}{\text{durée du mouvement}} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

l'accélération instantanée

$$a = \frac{\text{petite variation de vitesse}}{\text{petite durée}} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

unité S.I.:
a s'expime en m/s^2

signe:
a>0 si la vitesse algébrique v augmente
a<0 si v diminue

Exercice 5: Une voiture partant du repos atteint 90km/h après 8s. Pour augmenter sa vitesse de 90km/h à 120 km/h il lui faut 10 s. Pour freiner jusqu'à l'arrêt à partir de 120km/h il lui faut 11 s. Calculer l'accélération moyenne pour les 3 phases du mouvement

b) Mesure de l'accélération

Le problème pour l'intervalle de temps δt reste le même que pour la vitesse. Pour l'accélération les imprécisions vont encore augmenter. Dans les expériences on doit prendre un intervalle de temps δt assez grand (noté Δt) et le résultat correspond plutôt à une accélération moyenne.

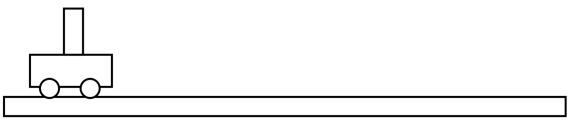
(1) méthode des barrières lumineuses

On place deux barrières lumineuses à un certain écart AB. Un chronomètre programmable est utilisé pour mesurer parallèlement le temps d'obscurcissement du fanion δx dans les 2 barrières et la durée du trajet de Δt_{AB} de A vers B.

On calcule alors $v_A=\delta x/\delta t_A$ et $v_B=\delta x/\delta t_B$ pour déduire $a=\frac{v_B - v_A}{\Delta t_{AB}}$

<u>Expérience 4</u> : Un chariot est tiré sur un rail par un poids suspendu à un fil qui passe par une poulie. Tracer le montage avec des barrières lumineuses en A et B. Déterminer l'accélération.

$\delta x=$



Δx(m)			
Δt_{AB} (s)			
δt_A(s)			
v_A (m/s)			
δt_B(s)			
v_B (m/s)			
a (m/s^2)			

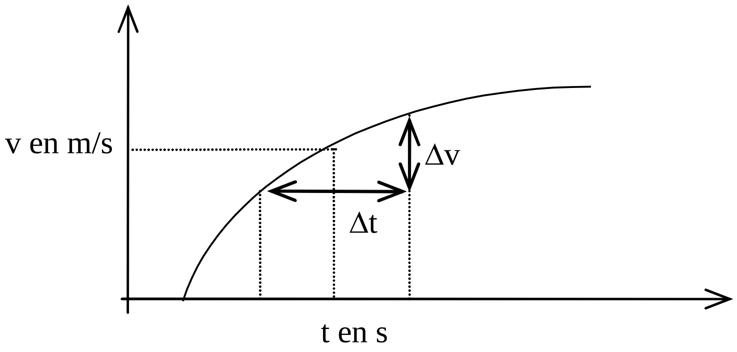
(2) méthode des positions successives

Exercice 6.: On donne un enregistrement avec une durée τ=0,02s entre 2 positions successives. Déterminer v_A et v_B au début et à la fin du mouvement pour déduire l'accélération moyenne $a_m=\frac{v_B - v_A}{\Delta t_{AB}}$

A B

(3) méthode de l'enregistrement v(t)

Parfois p.ex. à l'aide d'un tachymètre on obtient une représentation graphique de la vitesse instantanée v en fonction du temps t.
L'accélération correspond alors à la pente de la courbe vitesse-temps.



$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

4 Equations de mouvements rectilignes (cf. cahier)

MRU a=0 $v=v_0=\text{const} \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $x=v\cdot t+x_0$ $\Delta x = v \cdot \Delta t$	MRUA $a=\text{const} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $v=a\cdot t+v_0$ $x = \frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{v+v_0}{2}\cdot \Delta t = \frac{v^2-{v_0}^2}{2a}$

5 Mouvements curvilignes

a) Vitesse et accélération algébrique

D'après M1.1.c on peut repérer un mobile sur une trajectoire connue par son abscisse curvilgne s. On peut alors simplement remplacer x par s dans les équations établies pour le mouvement rectiligne. On ne tient alors pas compte de la courbure de la trajectoire.

Vitesse scalaire le long de la trajectoire $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$; $v = \frac{\partial s}{\partial t}$

Accélération scalaire le long de la trajectoire $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $a = \frac{\partial v}{\partial t}$

b) Vecteur vitesse

Pour caractériser la rapidité et l'orientation dans l'espace du mouvement d'un point M le long d'une trajectoire courbée AB on définit:

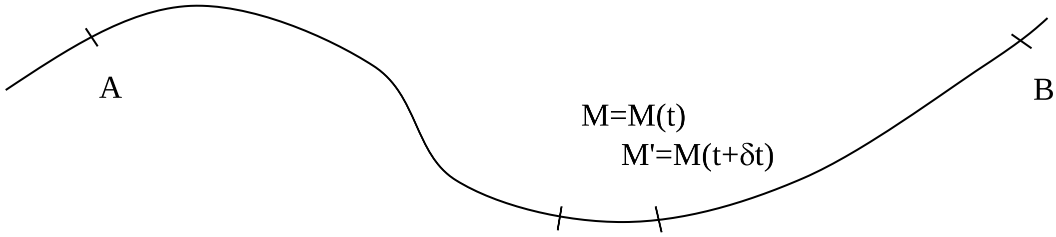
le déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\delta l} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \delta\,\overrightarrow{OM} =$$

le vecteur vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{\text{vecteur déplacement élémentaire}}{\text{petite durée correspondante}} = \frac{\overrightarrow{\partial \ell}}{\partial t} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial t}$$

Illustration:



En théorie on doit prendre un intervalle de temps δt et un déplacement élémentaire $\partial\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petit pour calculer le vecteur vitesse instantanée. Ainsi si M' se rapproche infiniment de M, l'orientation de $\partial\vec{\ell}$ et par conséquent de $\vec{v}$ devient tangent à la trajectoire. D'autre part MM' étant très petit, l'arc MM'=δs est quasi rectiligne et correspond à la norme du vecteur rectiligne $\left\|\partial\vec{\ell}\right\|$ et par conséquent $\left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{\left\|\partial\vec{\ell}\right\|}{\partial t} = \dfrac{\left|\partial s\right|}{\partial t} = \left|v\right|$.

Attention : Le déplacement $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ rectiligne est inférieur à l'arc courbé $\widehat{AB}$=s.

Caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}$:
* point d'application: position M=M(t) du mobile à l'instant t
* direction: celle de la tangente à la trajectoire
* sens: celui du mouvement
* norme: valeur absolue de la vitesse instantanée algébrique en M

En pratique on dispose souvent d'un enregistrement des positions successives M_0, M_1, M_2, ... occupé par le mobile M aux instants $t_0=0$, $t_1=\tau$, $t_2=2\cdot\tau$, ...respectivement.
Dans ce cas on construit le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_i$ en M_i en considérant les intervalles parcouru juste avant et après le passage par M.
Le vecteur $\vec{v}_i$ est caractérisé par

sa norme $v_i = \dfrac{M_{i-1}M_i + M_iM_{i+1}}{2\cdot\tau}$

sa direction parallèle à la droite $M_{i-1}M_{i+1}$ (=tangente à la trajectoire en M_i)

Exercice 7: Sur l'enregistrement suivant τ=0,1s
a) calculer la vitesse moyenne entre M_0 et M_7
b) déterminer et tracer le vecteur vitesse instantanée en M_2 et M_6 (échelle 0,1m/s $\rightarrow$1cm)
c) conxtruire le vecteur accélération

c) Vecteur accélération

Sur une trajectoire curviligne on doit tenir compte du changement de direction du vecteur vitesse pour calculer le vecteur accélération. Pour le trajet AB on définit

Le vecteur accélération moyenne

$$\vec{a}_m = \frac{\text{variation du vecteur vitesse}}{\text{durée du mouvement}} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{en m/s}^2$$

Illustration: Le mobile M devient plus rapide

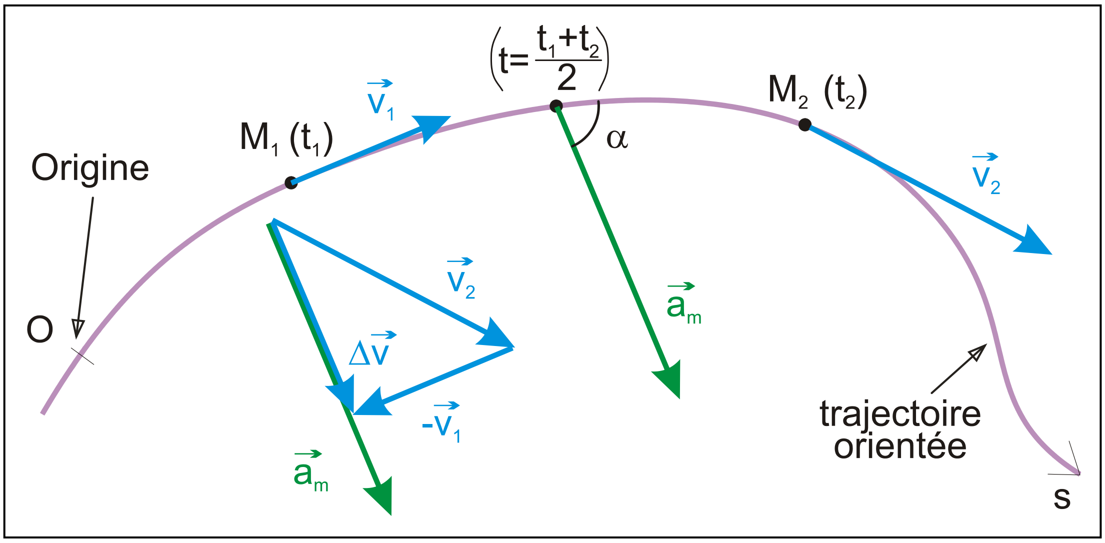
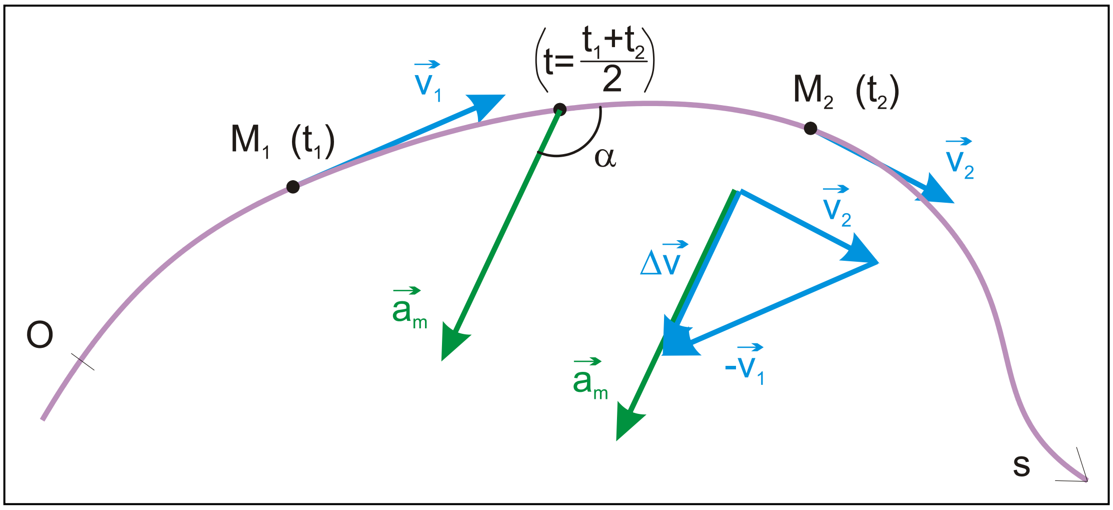


Illustration : Le mobile M devient plus lent



Le **vecteur accélération moyenne** $\vec{a}_m$ est appliqué à la date $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ au milieu de l'intervalle Δt considéré.

Attention : La différence des vecteurs vitesses ne correspond pas à la différence des normes !!

L'accélération instantanée $\vec{a}$ du mobile s'obtient en réduisant l'intervalle de temps Δt tellement que l'accélération ne puisse plus varier. En appliquant la notation δ pour les petites variations qui restent mesurables on définit

Le vecteur accélération instantanée

$$\vec{a} = \frac{\text{petite variation du vecteur vitesse}}{\text{petite durée}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \qquad \text{en m/s}^2$$

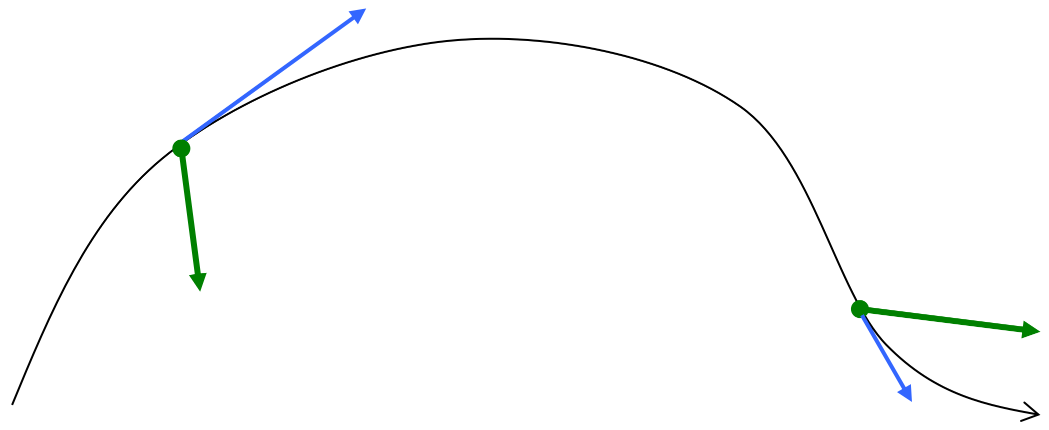
Caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$:
* point d'application: position M=M(t) du mobile à l'instant t
* orientation vers l'intérieur de la trajectoire

composante tangentielle $a_T = \frac{\delta v}{\partial t}$ *responsable de la variation de la norme de la vitesse*

composante normale a_N *responsable de la déviation de l'orientation du vecteur vitesse*

* norme $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

Illustration : Le mobile freine puis augmente sa vitesse le long de la courbe.



Noter: L'accélération algébrique définie sous a) correspond à l'accélération tangentielle.

Ex. 8: On donne le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ à l'instant t_1=4,3s et $\vec{v}_2$ à l'instant t_2=5,8s. Construire le vecteur $\vec{a}_m$. Echelle des vitesses: 0,1m/s $\rightarrow$ 1cm ; échelle des accélérations: 0,1m/s$^2 \rightarrow$1cm