Partie B : OSCILLATIONS et ONDES

B1. Oscillateurs

On appelle oscillation une évolution effectuée de part et d'autre d'un état d'équilibre stable.
On trouve des oscillateurs (=système oscillant) dans tous les domaines de la physique: mécanique, acoustique, électricité, optique,...
Un pendule pesant, une masse suspendue à un ressort ou une lame vibrante sont des exemples d'oscillateurs mécaniques. Ils effectuent un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre. Les oscillations mécaniques rapides sont souvent appelées vibrations.
S'il ne s'agit pas de masses, mais de charges électriques en mouvement alternatif on parle d'oscillations électriques.

Pour analyser un phénomène oscillatoire, il est nécessaire de chercher la (les) grandeurs physiques qui dépendent du mouvement: p.ex. la position, l'angle, la tension électrique,...
On peut ensuite mesurer:

- amplitude a = écart maximal de la grandeur physique par rapport à sa valeur d'équilibre
- période T = durée après laquelle la grandeur physique refait la même évolution
- fréquence $f = \dfrac{1}{\text{période}}$ = nombre d'oscillations effectuées par unité de temps

Oscillateur libre (ou propre):

Après un écart initial le système effectue spontanément une suite d'oscillations sans subir une action extérieure. Si les frottements sont négligeables on obtient un mouvement périodique de période propre T_0 (resp. fréquence propre f_0).

Oscillateur amorti:

Les oscillations libres réelles sont toujours plus ou moins amorties à cause des frottements. Suite à la perte progressive d'énergie, l'amplitude diminue jusqu'à l'arrêt. Un tel mouvement n'est plus périodique on définit une pseudo-période.

Oscillateur forcé:

Si un mécanisme extérieur (excitateur) impose des oscillations au système oscillant (résonateur) on parle d'oscillations forcés. Si la fréquence f des excitations = fréquence propre f_0 on obtient une résonance où l'amplitude devient maximale.

Oscillateur entretenu:

Si un système d'entretien compense exactement les pertes d'énergie d'un oscillateur amorti, on obtient des oscillations d'amplitude constante et de fréquence égale à la fréquence propre f_0.

Oscillateur harmonique (ou sinusoïdal):

Les oscillations les plus simples sont celles décrites par une fonction sinusoïdale

$$\boxed{y = a\cdot\sin(\omega t+\varphi)}$$

avec y = valeur algébrique de la grandeur à l'instant t   a = amplitude $= y_m$

$\omega\cdot t+\varphi$ = phase à l'instant t φ=phase initiale $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\cdot f$ = pulsation en $\frac{rad}{s}$

La projection d'un vecteur tournant de Fresnel donne un tel mouvement sinusoïdal.

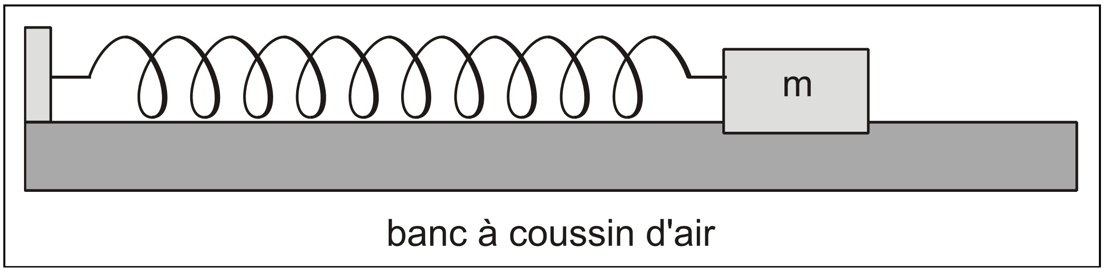
Simulation : http://www.walter-fendt.de/html5/phfr/circularmotion_fr.htm

(1) Projection sur Ox donne $x = a\cdot\cos(\omega t+\varphi)$
(2) dans la simulation $\varphi=0$ où se situe le point de départ si $\varphi=\pi/2$?
(3) si on augmente la période, la rotation et l'oscillation devient plus lente.

B2. Le pendule élastique horizontal

a) Description du pendule élastique

Disposons sur un rail à coussin d'air un chariot pouvant glisser pratiquement sans frottement. Il est attaché à un ressort de raideur k. Le ressort peut être étiré ou comprimé.



Simulation : https://javalab.org/en/spring_en/

Rem : Dans un montage expérimental on doit utiliser deux ressorts pour éviter que le ressort s'écarte latéralement. k désigne alors la raideur équivalente.

Si on écarte le chariot de sa position d'équilibre il effectue des **oscillations libres** (légèrement amorties).

b) Etude des forces et équation différentielle du mouvement

Le système étudié est le corps de masse m qui évolue dans le référentiel terrestre du labo.

L'origine O du repère est le centre d'inertie G du solide lorsque le ressort est en équilibre.

L'axe Ox est parallèle au ressort et orienté dans le sens de l'étirement du ressort.

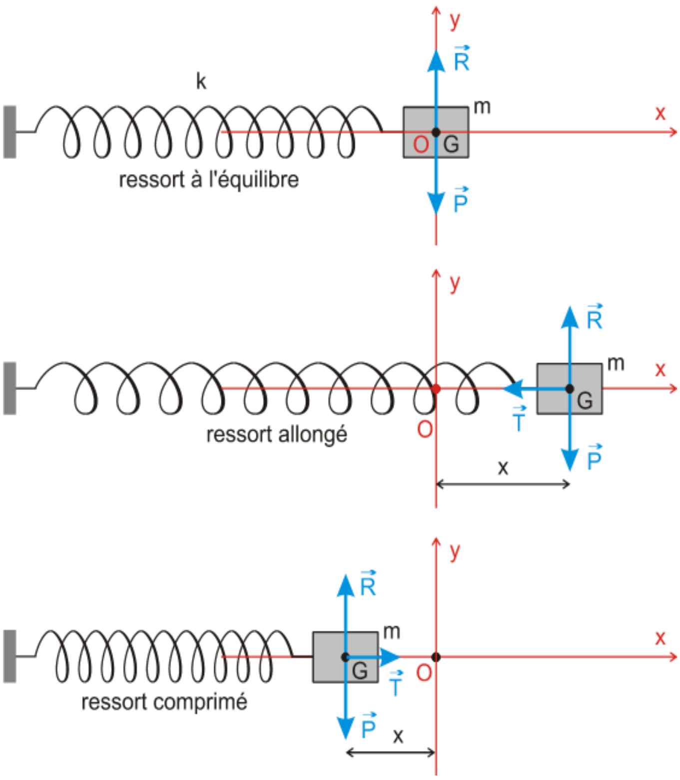
L'axe Oy est vertical vers le haut.

Le poids $\vec{P}$ est compensé par la réaction du rail $\vec{R}$.

La tension $\vec{T}$ du ressort tend à ramener le corps vers la position d'équilibre.

$x>0$ implique $T_x<0$ et $x<0$ implique $T_x>0$.

Loi de Hooke : $T_x=-k\cdot x$



Si on lache la masse sans vitesse initiale en $x_0=d$, le corps sera accéléré et effectue des oscillations de part et d'autre de la position d'équilibre sous l'effet de la force résultante.

Relation fondamentale de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{T} = m \cdot \vec{a}$

Mouvement selon Ox : $T_x = m \cdot a_x$

$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{kx}{m} \quad \text{(E)}$$

C'est une équation différentielle qui relie une fonction x(t) à sa propre dérivée (seconde).

c) Solutions x(t) de l'équation différentielle

On cherche des fonctions x(t) qui vérifient l'équation différentielle (E). Or l'expérience suggère que x(t) est une oscillation sinusoïdale.

Vérifions donc sous quelles conditions : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de (E).

dérivée 1ère : $\dot{x} = +X_m\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

dérivée 2nd : $\ddot{x} = -X_m\,\omega_0{}^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Si on remplace dans l'équation différentielle on obtient :

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{m}$$

$$-X_m\,\omega_0{}^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{k}{m} \cdot X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Cette équation est vérifiée pour tout t si :

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

Un pendule élastique non amorti formé par une masse m attachée à un ressort de raideur k effectue des oscillations harmoniques libres

de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

de période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

de fréquence propre : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Remarques :

- De la même façon $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est aussi solution de l'équation différentielle.
- L'élongation x varie entre $-X_m$ et $+X_m$. Par convention, les amplitudes sont toujours positives : $X_m > 0$.

d) Détermination de l'amplitude X_m et de la phase initiale φ

Nous déterminons ces constantes à l'aide des conditions initiales:

P.ex. à t = 0 ⇒ abscisse initial x_0 = d =0,04m > 0

vitesse initiale v_{0x} = 0

Abscisse : $x(t) = X_m \, sin(\omega_0 t + \varphi)$

Vitesse : $v_x(t) = \dot{x} = + X_m \, \omega_0 \, cos(\omega_0 t + \varphi)$

Conditions initiales à t=0 :

$$\begin{cases} x(0) = X_m \, sin(\varphi) = d & (1) \\ v_x(0) = X_m \, \omega_0 \, cos(\varphi) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) => $cos(\varphi) = 0$ $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \quad et \quad X_m \cdot 1 = d = 0{,}04m \\ \cancel{\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad et \quad X_m \cdot (-1) = d = 0{,}04m} \end{cases}$

La deuxième solution est à exclure car X_m obligatoirement positif.

Si le ressort à une raideur k=9 $\frac{N}{m}$ et la masse accrochée vaut m=0,25kg on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9}{0{,}25}} = 6 \, \frac{rad}{s}$$

Abscisse : $x(t) = X_m \, sin(\omega_0 t + \varphi) = 0{,}04 \cdot sin(6 \cdot t + \frac{\pi}{2}) = 0{,}04 \cdot cos(6 \cdot t)$

Vitesse : $v_x(t) = X_m \, \omega_0 \, cos(\omega_0 t + \varphi) = 0{,}24 \cdot cos(6 \cdot t + \frac{\pi}{2}) = -0{,}24 \cdot sin(6 \cdot t)$

Accélération : $a_x(t) = -X_m \, \omega_0^2 \, sin(\omega_0 t + \varphi) = -1{,}44 \cdot sin(6 \cdot t + \frac{\pi}{2}) = -1{,}44 \cdot cos(6 \cdot t)$

Elongation maximale : X_m = d= 0,04m Amplitude >0.

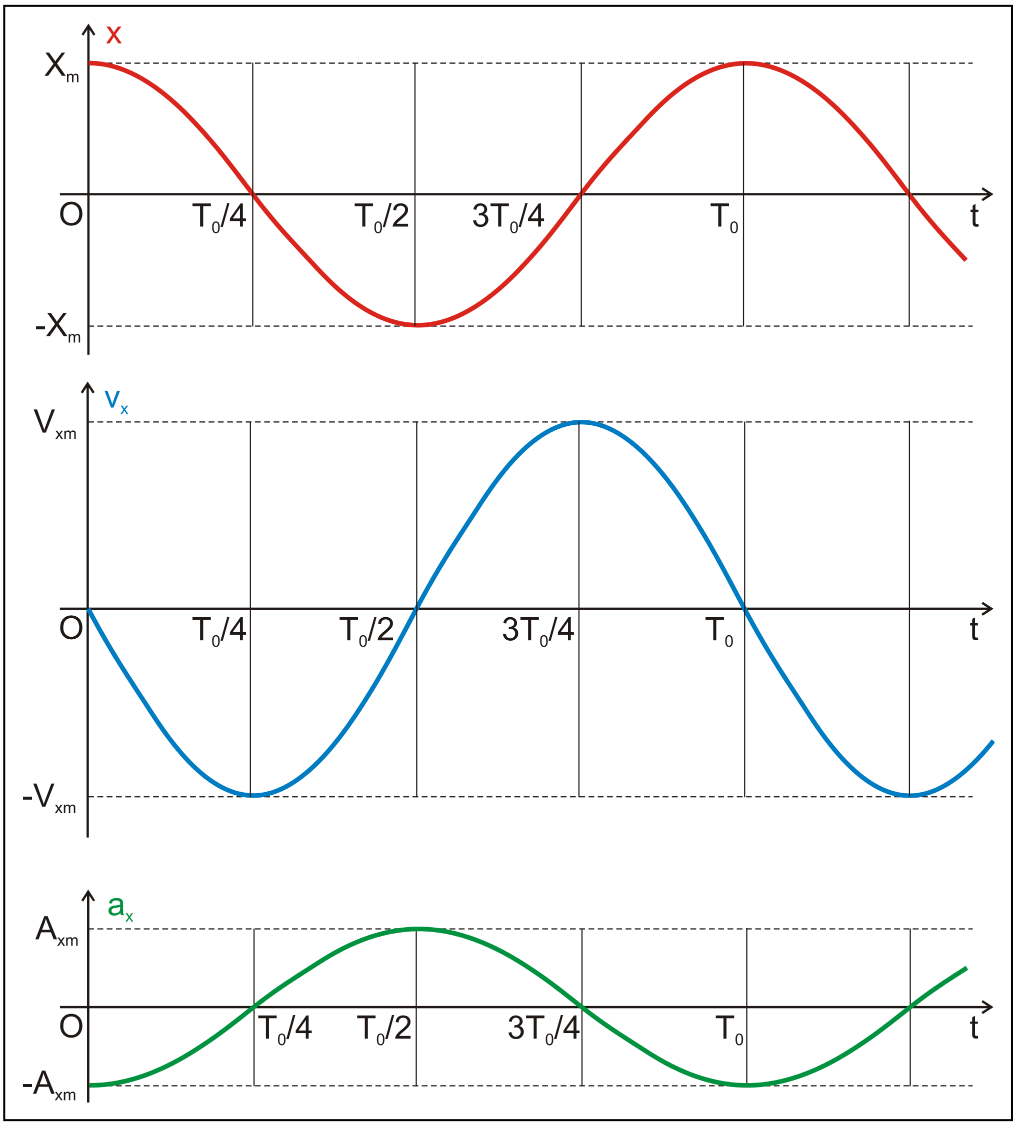
Vitesse maximale : $V_m = X_m \cdot \omega_0 = d \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}24 m/s$

Accélération maximale : $A_m = X_m \cdot \omega_0^2 = d \cdot \frac{k}{m} = 1{,}44$ m/s²

Force maximale : $T_m = m \cdot A_m = m \cdot X_m \cdot \frac{k}{m} = k \cdot X_m = 0{,}36 \, N$

Période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}047 \, s$ (ne pas confondre avec la force de rappel !!)

Représentation graphique :



Exercice :

1) Dessiner le cas numérique précédent sur papier quadrillé avec les x,v,a dans un graphique.

2) Ecrire l'équation de mouvement x(t) la plus simple pour :

Les conditions initiales suivantes:

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = -d < 0$
$v_{0x} = 0$

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = 0$
$v_{0x} = v > 0$

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = 0$
$v_{0x} = -v < 0$

e) Energie mécanique de l'oscillateur

Si $x(t) = X_m \, sin(\omega_0 t + \varphi)$ on a :

* Energie potentielle élastique du ressort:

$$E_{\text{p élastique}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{k X_m^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie cinétique du solide: $E_c = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{m X_m^2 \omega_0^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$Or \quad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \; implique \; que \;\; \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{m X_m^2 \omega_0^2}{2} = \frac{m X_m^2 k}{2m} = \frac{1}{2} k X_m^2$

$$donne \quad E_c = \frac{k X_m^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie potentielle élastique du ressort:

$$E_{\text{p élastique}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{k X_m^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie mécanique de l'oscillateur:

$$E = E_{\text{p élastique}} + E_c = \frac{k X_m^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k X_m^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot V_m^2 = \text{const}$$

Conclusion: L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est conservée.

f) Etablissement de l'équation différentielle par méthode énergétique

Sans frottement l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est conservée:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv_x^2 = \text{constant}}$$

* Dérivons par rapport au temps cette expression de l'énergie mécanique:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} kx^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} mv_x^2) = 0 \qquad \text{(la dérivée d'une constante est nulle)}$$

On obtient en appliquant les règles de dérivation établies en mathématiques:

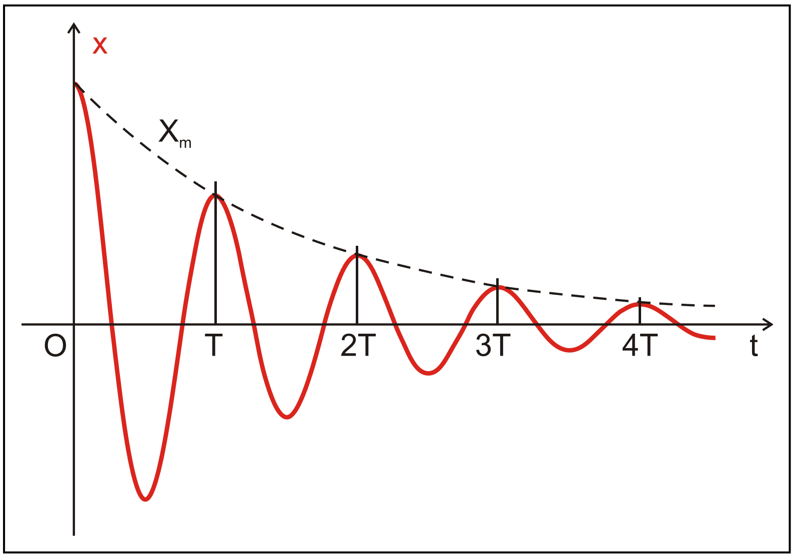
$kx \cdot \dot{x} + m v_x \cdot \dot{v}_x = 0$ en divise par $v_x = \dot{x}$ qui n'est pas nul en mouvement

donne : $kx + m \cdot \dot{v}_x = 0$ or $\dot{v}_x = \ddot{x}$

on retrouve : $\boldsymbol{\ddot{x} = -\frac{kx}{m}}$

g) Etude qualitative du pendule élastique amorti

L'amplitude X_m diminue au cours du temps à cause des frottements.

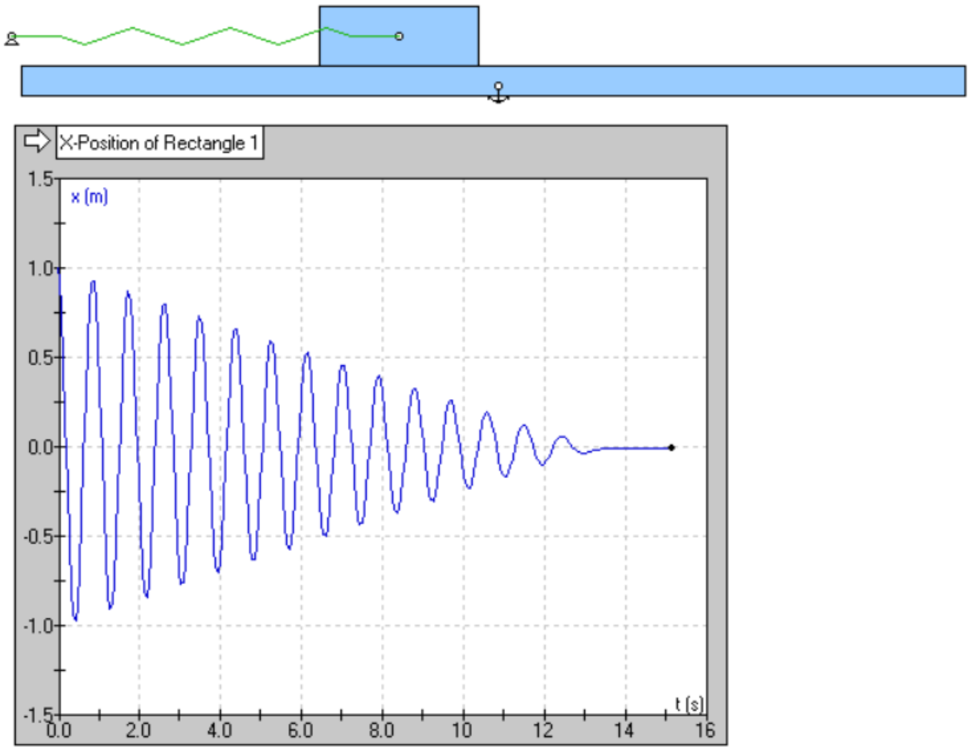


L'énergie mécanique diminue au cours du temps et se transforme en énergie calorifique.

L'oscillateur n'est donc pas périodique. On parle quand-même de sa pseudo-période T.

Si le frottement est proportionnel à la vitesse (frottement fluide) l'amortissement est exponentiel.

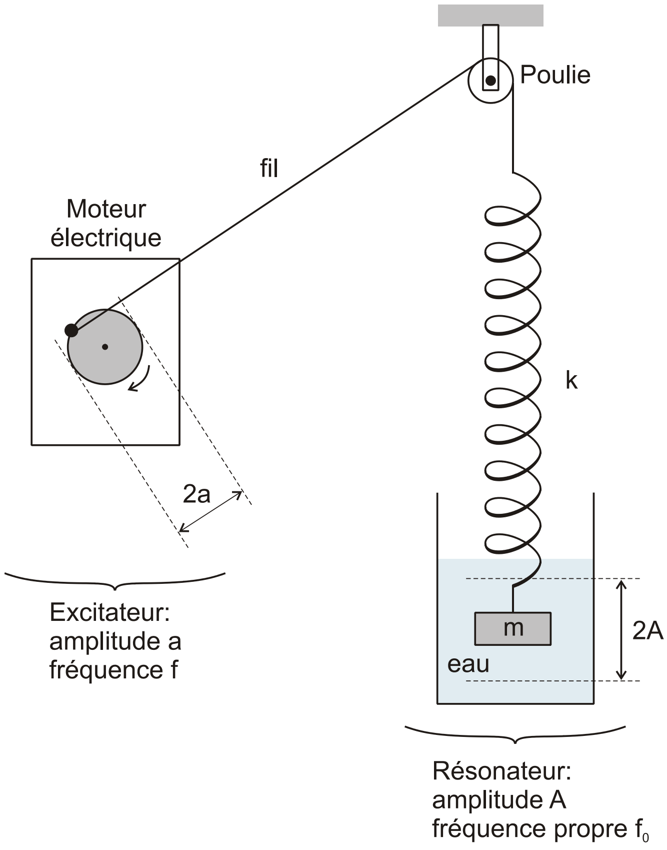
Si le frottement est constant (frottement solide) l'amortissement est linéaire cf. stylo sur papier ou simulation interactive physics (kinetic friction).



Remarque : Un pendule élastique vertical, où une masse est accrochée à un ressort vertical, oscille de la même manière autour de sa position d'équilibre. cf. LABO virtuel.

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_fr.html

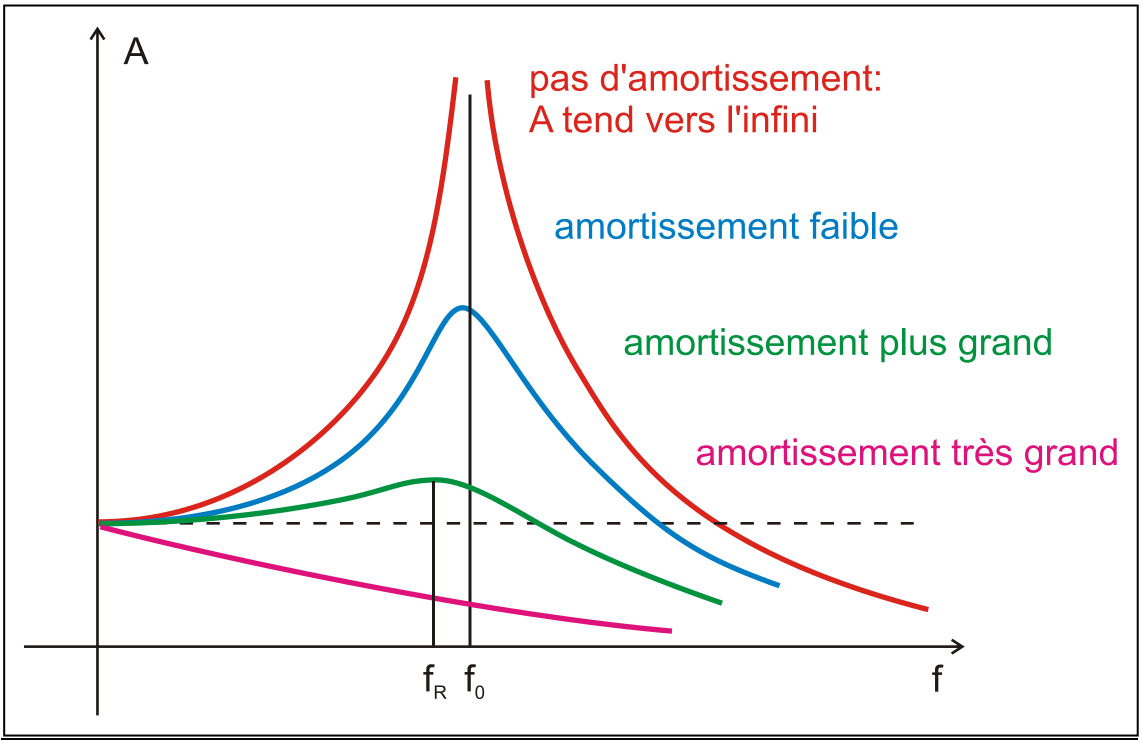
h) Oscillations forcées. Résonance



* Le résonateur effectue des oscillations de même fréquence que celle de l'excitateur: il effectue des oscillations forcées.
* L'amplitude A du résonateur dépend de la fréquence de l'excitateur et de l'intensité de l'amortissement.
* A passe par un maximum: c'est la **résonance**. La fréquence de résonance f_r est presque égale à la fréquence propre f_0 du résonateur.
* Si l'amortissement est faible, on peut avoir A >> a (catastrophe de résonance)

Rem : Le montage peut varier, souvent on utilise un frein magnétique f_{frott}~v.

Simulations : http://www.walter-fendt.de/html5/phfr/resonance_fr.htm
https://ophysics.com/waves3a.html



La courbe A(f) est appelée courbe de réponse du résonateur.
Une résonance peut provoquer des effets destructeurs,
p.ex. Tacoma Bridge : https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
Résonance: Verre et son Résonance: Verre et son, ralenti