Chapitre 4: Mouvement d'une particule soumise à une force centrale. Gravitation

1. Particule en mouvement circulaire uniforme

Un corps de masse m, en **mouvement circulaire uniforme** de rayon r et de vitesse v (de vitesse angulaire ω), a une **accélération centripète** $\vec{a}$ de norme $a_{\mathrm{N}} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$.

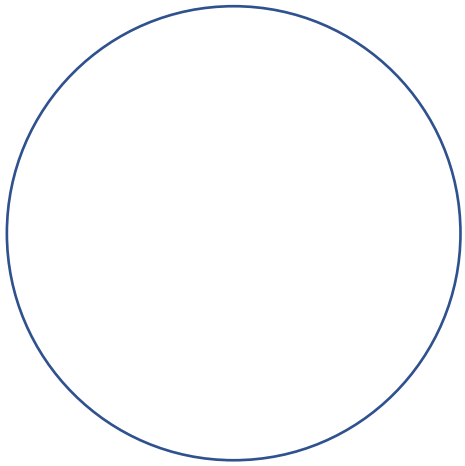
La force résultante s'exerçant sur un corps en mouvement circulaire uniforme est centripète

Norme :

$\mathrm{F_C} = ma = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$

Vecteur :

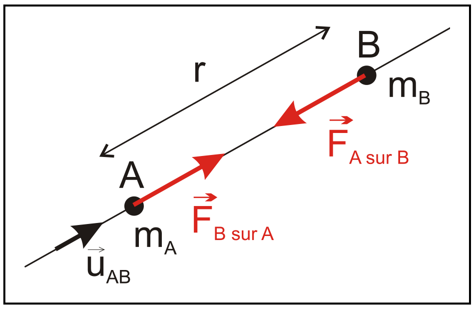
$\overrightarrow{\mathrm{F_C}} = m\vec{a} = mr\omega^2 \cdot \vec{\mathrm{N}} = m\frac{v^2}{r}\,\vec{\mathrm{N}}$



2. Force d'interaction gravitationnelle de Newton

Deux particules matérielles ponctuelles A et B de masses respectives m_A et m_B, situées l'une de l'autre à la distance r, s'attirent mutuellement avec une force d'intensité

$$F_{A\,sur\,B} = F_{B\,sur\,A} = K\frac{m_A m_B}{r^2}$$



* $\vec{F}_{A\ sur\ B}$ est la force gravitationnelle que A exerce sur B.
$\vec{F}_{B\ sur\ A}$ est la force gravitationnelle que B exerce sur A.
D'après le principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{A\,sur\,B} = -\vec{F}_{B\,sur\,A}$

* K est la **constante de gravitation universelle** qui vaut $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

Remarque : La loi de Newton vaut pour des masses ponctuelles. Elle s'applique de la même manière pour des corps à symétrie sphérique. r désigne alors la distance entre les centres de masse.

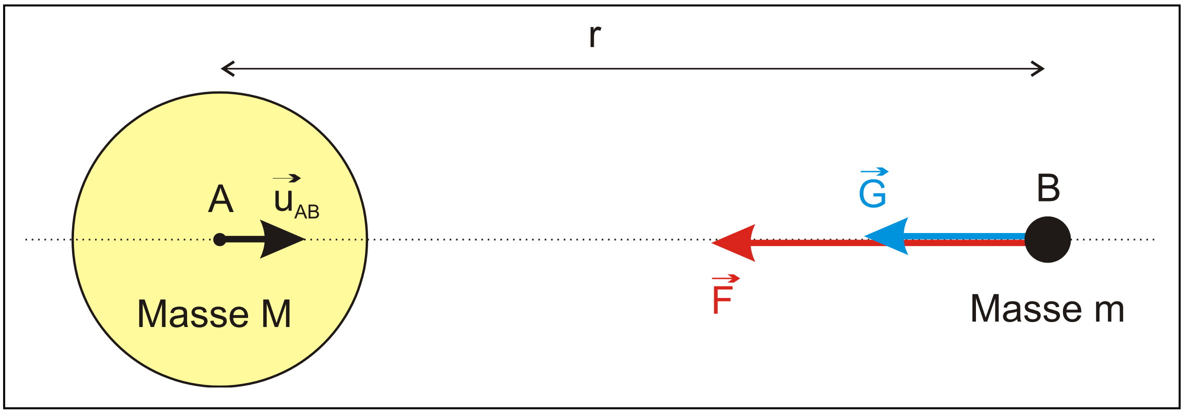
3. Gravitation autour d'un corps céleste M

a) Force et champ d'attraction gravitationnelle autour d'un corps central

Considérons une grande masse sphérique M située en un point A. La masse M crée un champ de gravitation autour d'elle.

Plaçons (par la pensée) une petite masse m en un point B situé à la distance r du centre A de M. **La masse m** subit une **force de gravitation** $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_{AB} \qquad (\vec{u}_{AB} = \text{vecteur unitaire dirigé de A vers B})$$



Le **champ de gravitation du corps central M** en un point de l'espace est caractérisé par un vecteur $\vec{G}$ égal à la force de gravitation par unité de masse test en ce point.

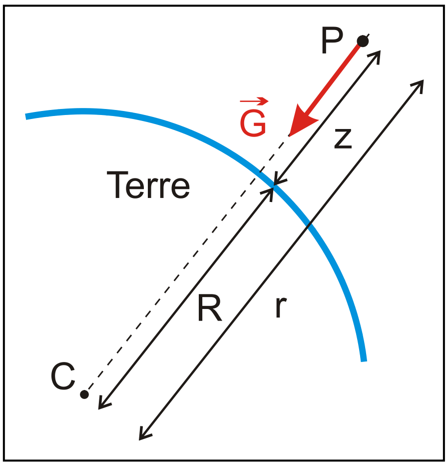
$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \text{Norme : } G = \frac{F}{m} \quad \Leftrightarrow \quad F = mG} \quad \text{Unité de G : N/kg.}$$

Le vecteur champ $\vec{G}$ est une caractéristique du point B considéré ; il est indépendant de la masse test m et pointe vers le centre de la masse M.

$$\vec{G} \text{ au point B : } \quad \vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = -K\frac{M}{r^2}\vec{u}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \text{Norme : } \boxed{G = K\frac{M}{r^2}}$$

b) Champ de gravitation d'une planète (p.ex. de la Terre)

L'intensité du champ de gravitation de la Terre (ou de tout autre corps céleste) diminue lorsqu'on s'éloigne du centre C de la Terre. Soit R le rayon et M la masse de la Terre ; considérons un point P situé à l'altitude z au-dessus de la surface terrestre.



A l'altitude z: $r = R + z$

$$G = K \cdot \frac{M}{(R+z)^2} \qquad (1)$$

A la surface de la Terre, z = 0 : $G_0 = K\frac{M}{R^2}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{G = G_0 \dfrac{R^2}{(R+z)^2}}$ (3) Variantes avec : $K \cdot M = G_0 \cdot R^2$

A la surface de la Terre supposée sphérique (masse terrestre = 5,9742 10^{24} kg, rayon terrestre moyen = 6371 km) le calcul donne : G_0 = = 9,82 N/kg.

c) Champ de gravitation G_0 et champ de pesanteur g

La détermination de g par la chute libre se fait dans un repère terrestre, qui, **à cause de la rotation de la Terre**, n'est pas galiléen. En toute rigueur $\vec{G_0} \neq \vec{g}$ à la surface terrestre.

Mais comme la vitesse angulaire de la Terre est relativement faible, on peut écrire en première approximation : $\boxed{g \approx G_0}$

A cause de la rotation terrestre et de l'aplatissement de la Terre (rayon polaire = 6357 km, rayon équatorial = 6378 km), g varie avec la latitude du lieu : équateur : g = 9,78 m/s²; Luxembourg : g = 9,81 m/s² ; aux pôles g = 9,83 m/s² (Unités : m/s² ou N/kg).

4. Mouvement général des planètes et satellites

a) Force et accélération

Identifier le corps central M et le corps en orbite m avec M >>m.

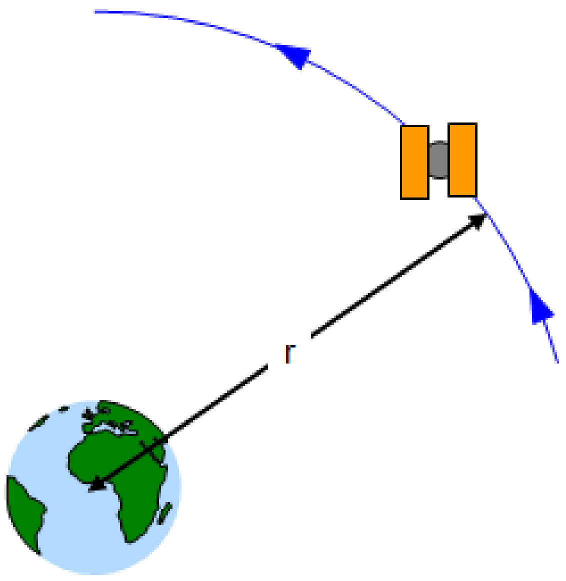
Référentiel héliocentrique (de Copernic) pour le mouvement des planètes autour du Soleil.
Référentiel géocentrique pour le mouvement des satellites autour de la Terre.
Les axes x,y,z sont orientés vers les étoiles fixes.

Pour lancer un satellite, on le place à une certaine distance r et on le lance avec une vitesse initiale $\vec{v}$ tangentielle. Dans le vide de l'espace, le corps ne subit pas de frottement et évolue sur une trajectoire courbée sous l'effet exclusif de la force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G} = -K \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

d'après la RFD

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{G} = -K \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}$$



Puisque $\vec{a}$ est **indépendant de la masse m du satellite**, tous les satellites suivent le même mouvement s'ils sont lancés sous les mêmes conditions initiales.

http://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/more_stuff/Applets/Kepler/kepler.html

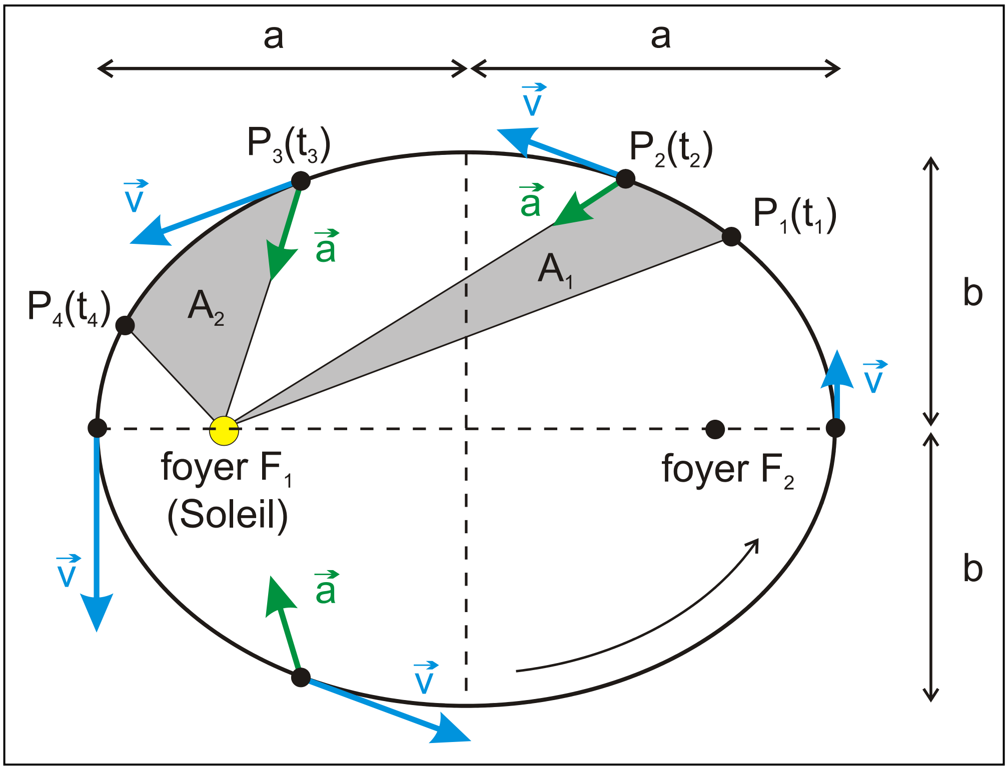
Les observations du ciel (ou des simulations) montrent qu'on peut obtenir des trajectoires fermées sous forme d'ellipse r=variable ou de cercle r=const. Les orbites des planètes du système Solaire sont des ellipses presque circulaires.

Pour des vitesses élevées des trajectoires ouvertes paraboliques ou hyperboliques sont également possibles (ce qui est p.ex. le cas pour certaines comètes rapides).

b) Lois de Kepler

Partisan du système de **Copernic** (trajectoires circulaires autour du Soleil) qu'il voulait démontrer avec des observations précises relevés par **Tycho Brahe**, Kepler constata que les trajectoires des planètes ne sont pas circulaires mais elliptiques.

http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/kepler.html



Indiquer la périhélie I (proche) et l'aphélie J (loin) avec leur vecteurs accélération

1^re^ loi de Kepler

Les trajectoires planétaires sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

2^e^ loi de Kepler

En des durées égales, les aires balayées par le segment qui joint le centre de la planète au centre du soleil sont égales.
Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ alors $A_1 = A_2$.

3^e^ loi de Kepler

Le carré de la période de révolution T d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe a de son orbite.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{constante} \qquad \text{demi-grand axe } a = \tfrac{1}{2}(F_1I + F_1J) = \tfrac{1}{2}(r_{\text{périhélie}} + r_{\text{aphélie}})$$

(T_1 et a_1 d'une première et T_2 et a_2 d'une deuxième planète)

Remarques :

- Noter que $\vec{a}$ n'est pas normal (perpendiculaire) à la trajectoire elliptique sauf en I et J.
- Newton a déduit la loi de gravitation des mouvements des planètes.

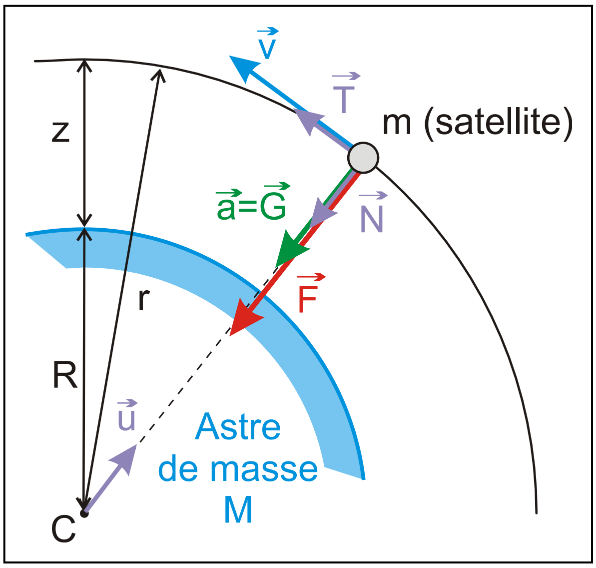
5. Satellite en mouvement circulaire et uniforme

Souvent les mouvements des satellites (ou planètes) sont quasi circulaire de rayon

r=R+z avec R = rayon de l'astre et z = altitude

Dans ce cas le demi-grand axe a=r et le centre de l'astre correspond au centre de la trajectoire.

Les 2 foyers sont confondus : $C=F_1=F_2$.



Repère géocentrique dans le plan de la trajectoire. Base locale de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$ attachée au satellite.

Puisque la trajectoire est circulaire, la force et l'accélération sont tout le temps orienté suivant le vecteur normal $\vec{N}$.

Force :

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u} = K \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{N}$$

Accélération d'après la RFD :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{G} = K \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{N} + 0 \cdot \vec{T}$$

Comparaison avec accélération dans la base de Frenet.

axe tangentiel : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ (1) axe normal : $a_N = \frac{v^2}{r} = K \cdot \frac{M}{r^2}$ (2)

a) Vitesse en fonction du rayon r:

(1) donne : v = const il s'agit d'un MCU

(2) donne : $v^2 = K \cdot \frac{M}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{K \cdot \frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{G_0 \cdot R^2}{(R+z)}}$ la vitesse diminue avec l'altitude

b) Periode de révolution :

T= $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{K \cdot \frac{M}{r}}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K \cdot M}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+z)^3}{G_0 \cdot R^2}}$

c) Coefficient 3e loi de Kepler :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{KM} \Leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM} = \frac{T^2}{a^3}$$ demi grand axe a= rayon r

Application : Déduire la masse du Soleil si on connait la période de révolution T=365,25jours et la distance Terre-Soleil $r=149{,}6 \cdot 10^9$m. M =

d) Satellite géostationnaire

Pour un satellite terrestre tournant dans le plan de l'équateur, on peut calculer l'altitude z pour que T = 23 h 56 min 4 s (période de rotation terrestre = jour sidéral= par rapport aux étoiles (latin sidus) fixes). Dans ce cas, la période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre. Alors le satellite reste toujours à la verticale d'un point de l'équateur et paraît donc immobile dans le référentiel terrestre. Le satellite est dit géostationnaire.

Kepler 3 : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM}$

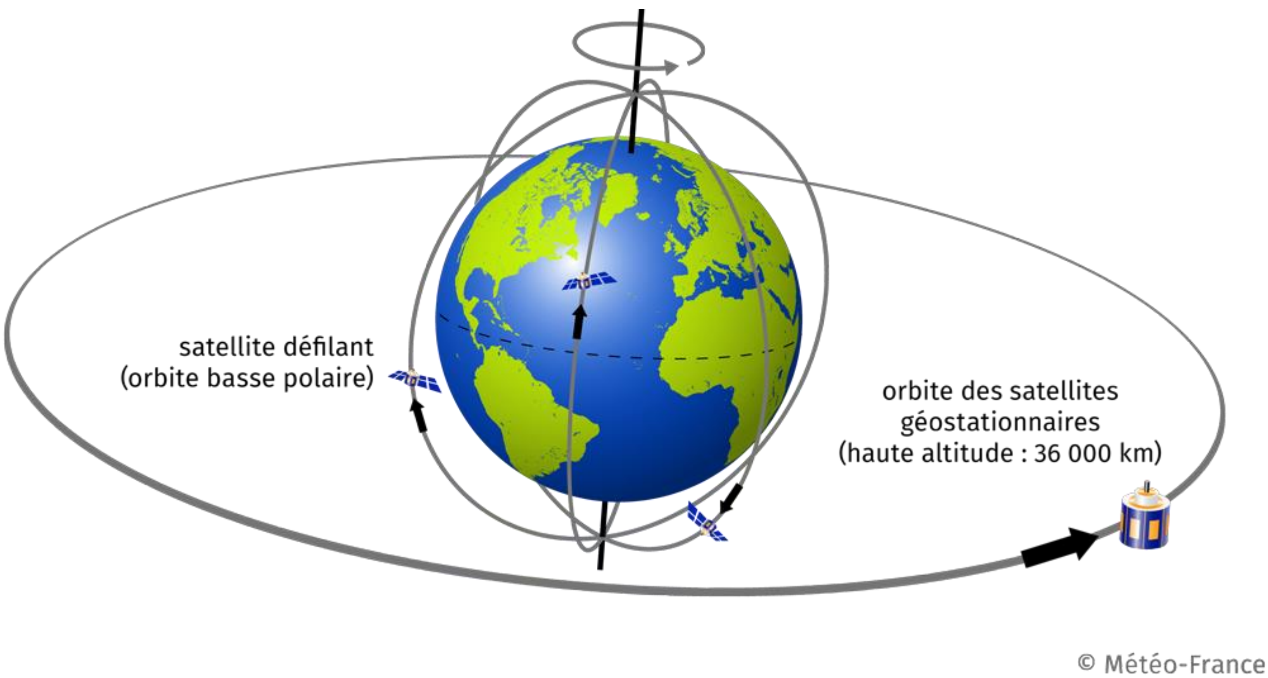
$\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{T^2 KM}{4\pi^2}$ T= s M= kg

$$R + z = \sqrt[3]{\frac{T^2 \mathrm{KM}}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 m$$ (evtl. remplacer K·M= $G_0 \cdot R^2$)

$$z = \left(4{,}22 \cdot 10^7 - 6{,}4 \cdot 10^6\right) \mathrm{m} = 3{,}58 \cdot 10^7 \mathrm{m}$$

On trouve pour l'altitude z du satellite à peu près 36000 km.

Pourquoi n'y a-t-il pas de satellite géostationnaire placé à la verticale de Luxembourg ? (Quel doit être le centre de sa trajectoire circulaire ?)



e) Impesanteur (=apesanteur)

Si la station spatiale est en orbite sans propulsion, l'astronaute (à l'intérieur ou à proximité de la station) subit la même accélération vers la Terre que la station elle-même.

Cela marche aussi lors d'un vol parabolique zéro G ou l'avion imite une trajectoire de tir parabolique.

$$a_{astronaute} = a_{vaisseau} = G$$

Dans le référentiel (non galiléen) du vaisseau : l'astronaute n'effectue aucun mouvement de chute accéléré et **il est en impesanteur**.

Son poids par rapport au vaisseau est nul.