

A2 Mouvement dans le champ de pesanteur

a) Système étudié

Un projectile, de masse m est lancé dans le champ de pesanteur \vec{g} avec une **vitesse initiale de lancement** \vec{v}_0 . Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé **angle de tir**.

Dans la suite on n'étudiera que des mouvements de vitesse initiale faible. Les dimensions de la trajectoire restent alors négligeables par rapport au rayon de la Terre **ce qui permet de considérer le champ de pesanteur comme uniforme** :

Caractéristiques du champ de pesanteur uniforme \vec{g} :

direction: verticale
 sens: vers le bas
 norme $g = 9,8 \text{ m/s}^2 = \text{constant}$

De plus, si la vitesse du projectile reste faible on pourra **négliger le frottement de l'air** par rapport au poids.

Le repère terrestre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est supposé galiléen. L'origine O ne coïncide pas forcément avec le point de lancement du projectile.

L'axe Ox (défini par \vec{i}) est horizontal et est contenu dans le plan vertical contenant \vec{v}_0 .

L'axe Oy (défini par \vec{j}) est vertical et dirigé vers le haut.

On n'a pas besoin de troisième axe car le mouvement se déroule dans un plan.

Position initiale :

A $t = 0$: \overline{OM}_0 : $x_0 = 0$ (prendre $x=0$ au point de lancement)
 $y_0 \neq 0$ (le projectile part à une altitude quelconque)

Vitesse initiale :

A $t = 0$: \vec{v}_0 forme avec l'horizontale un angle de tir α tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\vec{v}_0 : \quad \begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

b) Equations horaires du mouvement

Forces extérieures

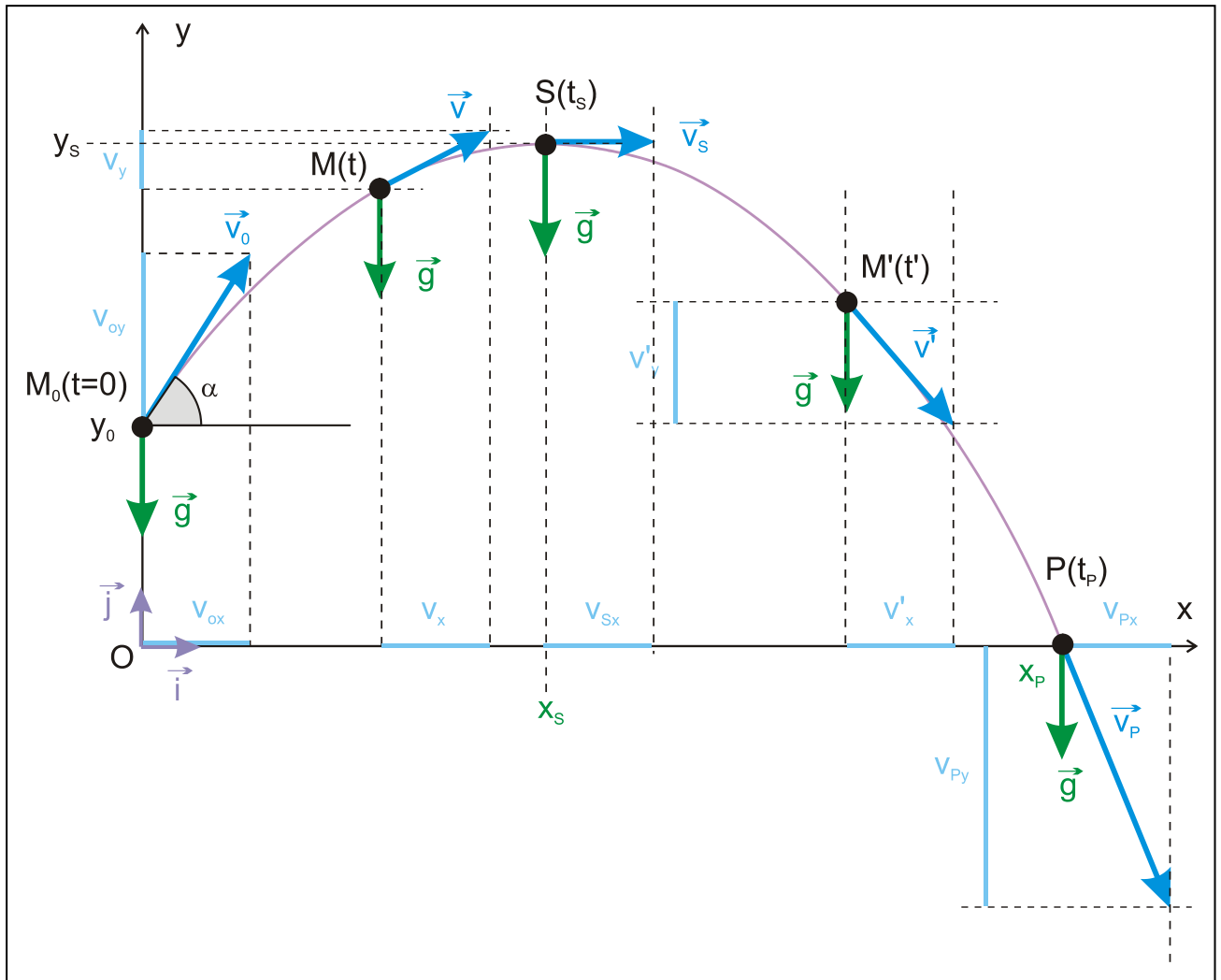
Seule force extérieure : poids \vec{P} du projectile. (Nous avons négligé le frottement !)

Accélération

Appliquons la RFD:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{P} = m\vec{a} \quad m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

Accélération constante : $a_x=0$ (1) $a_y=-g$ (2)



1^{re} Intégration => Vitesse

Comme $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, les coordonnées de la vitesse sont les primitives des coordonnées de l'accélération.

En prenant la primitive de la relation (1), on obtient : $v_x = C$ (3)

Condition initiale : $t = 0 \Rightarrow v_x = v_0 \cos \alpha$

Remplaçons dans (3) $\Rightarrow C = v_0 \cos \alpha$. Donc : $v_x = v_0 \cos \alpha$ (4)

La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme.

En prenant la primitive de la relation (2), on obtient : $v_y = -gt + C$ (5)

Condition initiale : $t = 0 \Rightarrow v_y = v_0 \sin \alpha$.

Remplaçons dans (5) $\Rightarrow C = v_0 \sin \alpha$. Donc : $v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$ (6)

La projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

2^e intégration => Position (équations paramétriques du mouvement)

Comme $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$, les coordonnées de la position sont les primitives des coordonnées de la vitesse.

En prenant la primitive de la relation (4), on obtient : $x = v_0(\cos \alpha) \cdot t + C$ (7)

Condition initiale : $t = 0 \Rightarrow x = x_0 = 0$.

Remplaçons dans (7) $\Rightarrow C = 0$. Donc : $x = v_0(\cos \alpha) \cdot t$ (8)

En prenant la primitive de la relation (6), on obtient : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha) \cdot t + C$ (9)

Condition initiale : $t = 0 \Rightarrow y = y_0$.

Remplaçons dans (9) $\Rightarrow C = y_0$. Donc : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha) \cdot t + y_0$ (10)

c) La trajectoire et ses caractéristiques**• Equation cartésienne de la trajectoire**

(8) $\Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$

Dans (10) $\Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha + y_0$ (11)

C'est l'équation d'une parabole.

• Position du point d'impact P sur le sol

Pour P, $y = 0$. Remplaçons dans l'équation (11): $-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha + y_0 = 0$ (12)

Cette équation du deuxième degré a en principe deux racines et il faut éliminer celle qui correspond à une valeur de $x < 0$.

• Position du point d'impact P au cas particulier où $y_0 = 0$ (même hauteur)

L'équation (12) s'écrit maintenant: $x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = 0$

Il faut donc que: soit $x = 0$, soit $-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$

$\Leftrightarrow x =$

$$\begin{aligned}
 1^{\text{ère}} \text{ solution: } & x_1 = 0 \quad (\text{point de lancement}) \\
 2^{\text{e}} \text{ solution: } & x_2 = x_P = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (13)
 \end{aligned}$$

* Remarque 1

La relation (13) permet de calculer α pour une valeur donnée de v_0 !

$$\sin(2\alpha) = \frac{g \cdot x_P}{v_0^2}$$

Cette équation trigonométrique admet deux solutions α_1 et α_2 telles que :

$$2\alpha_2 = 180^\circ - 2\alpha_1$$

$$\text{ou bien : } \alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$$

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0 , une même portée x_P est atteinte pour deux angles de tir différents (si α est différent de 0° , 45° et 90°). Ces deux angles sont complémentaires.

* Remarque 2

x_P dépend de l'angle de tir; pour une valeur donnée de v_0 elle est maximale si :

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0 , la portée x_P est maximale pour $\alpha = 45^\circ$.

• **Position du sommet S (altitude maximale atteinte)**

En S, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle :

$$v_y(S) = 0 \Leftrightarrow -gt_s + v_0 \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{d'où pour l'abscisse : } x_s = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\text{Remplaçons dans (10): } \boxed{y_s = -\frac{1}{2} g t_s^2 + v_0 (\sin \alpha) \cdot t_s + y_0}$$

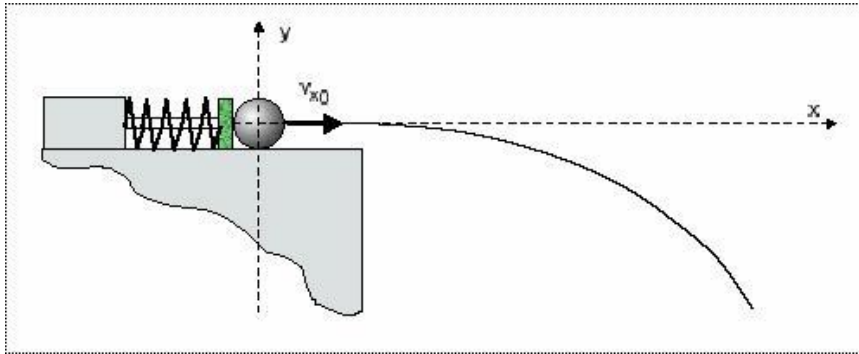
pour l'altitude maximale on obtient alors:

$$y_s = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) + y_0$$

$$\text{Finalement: } y_s = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + y_0$$

• Cas particuliers

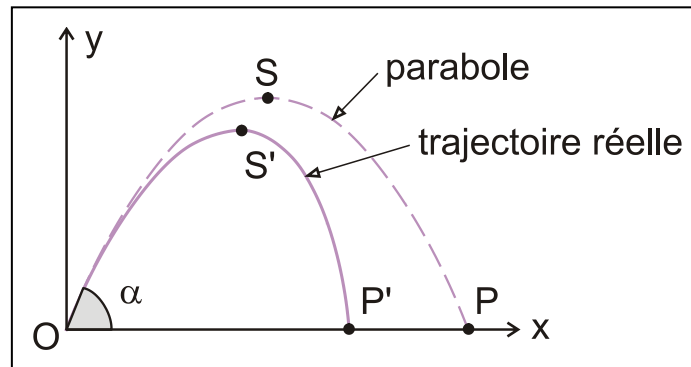
$\alpha=0^\circ$ tir horizontal à partir de l'origine. $x = v_0 \cdot t$ $y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$



$\alpha=90^\circ$ tir vertical à partir de l'origine : $x=0$ $y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

• Tir réel

En présence du frottement de l'air, la trajectoire n'est plus symétrique et les valeurs $y_{S'}$ et de $x_{P'}$ sont nettement inférieures à celles qu'on vient de calculer.



Exemple :

On a une machine à tirer des projectiles. Elle communique aux projectiles toujours la même vitesse initiale. Pour un angle de tir $\alpha=45^\circ$, la portée vaut ____m. Déduire la vitesse initiale.

- Trouver la portée pour un angle de tir de 60° .*
- Existe-t-il un autre angle donnant la portée précédente.*

Expérience avec jet d'eau qui explique comment la parabole change si on change l'inclinaison.

