A2 Mouvement dans le champ de pesanteur

a) Système étudié

Un projectile, de masse m est lancé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une **vitesse initiale de lancement** $\vec{v}_0$. Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé **angle de tir**.

Dans la suite on n'étudiera que des mouvements de vitesse suffisamment faible pour que l'on puisse considérer **le champ de pesanteur uniforme** et **négliger le frottement de l'air.**

Caractéristiques du champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$:

direction: verticale
sens: vers le bas
norme $g = 9,8\ m/s^2$ = constant

Le repère terrestre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est supposé galiléen. L'origine O ne coïncide pas forcément avec le point de lancement du projectile.
L'axe Ox (défini par $\vec{i}$) est horizontal et est contenu dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.
L'axe Oy (défini par $\vec{j}$) est vertical et dirigé vers le haut.
On n'a pas besoin de troisième axe car le mouvement se déroule dans un plan.

Position initiale :

A t = 0 : $\overrightarrow{OM_0}$: $x_0 = 0$ (prendre x=0 au point de lancement)
$y_0 \neq 0$ (le projectile part à une altitude quelconque)

Vitesse initiale :

A t = 0 : $\vec{v}_0$ forme avec l'horizontale un angle de tir α tel que $0 < \alpha < 90°$

$\vec{v}_0$: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$
$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

b) Equations horaires du mouvement

Forces extérieures

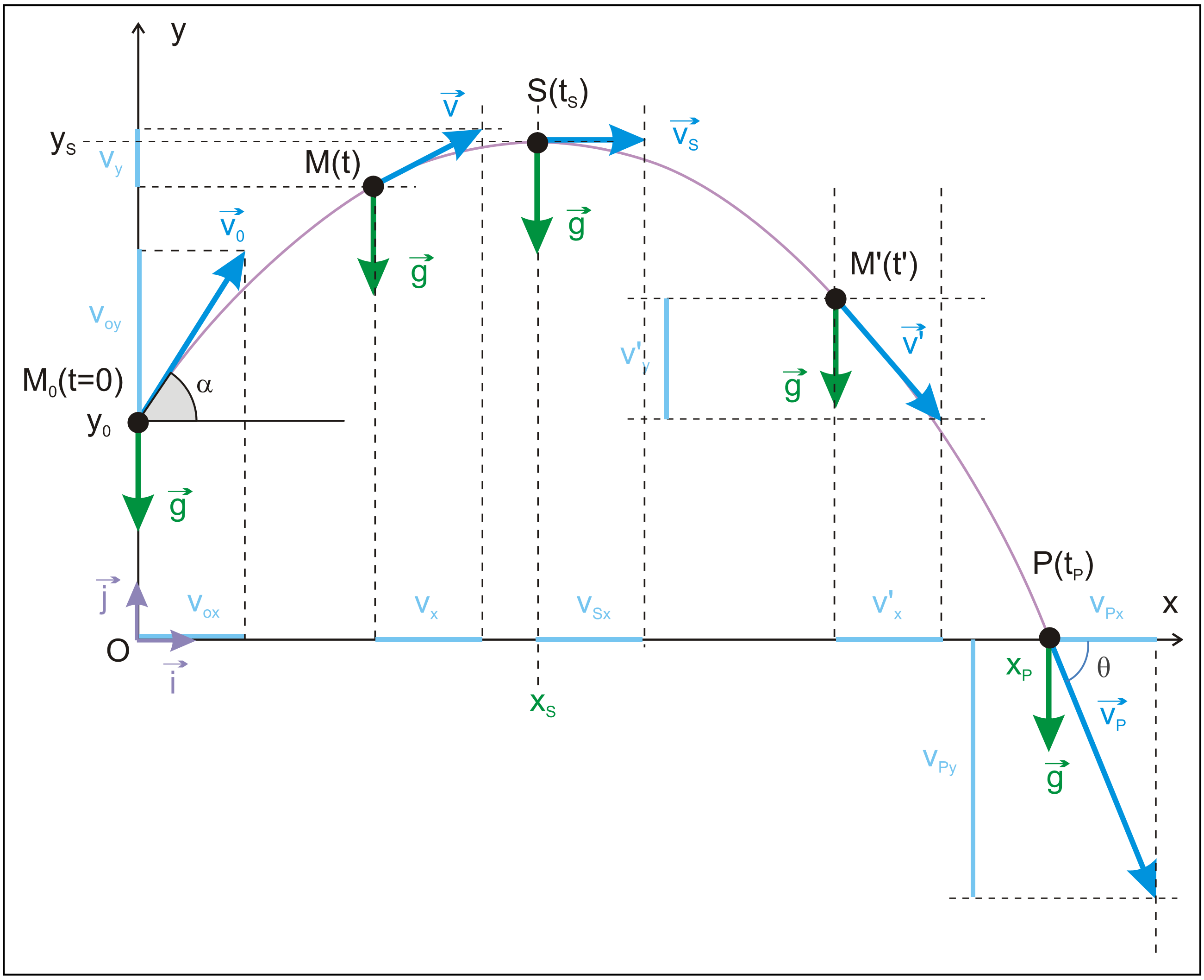
Seule force extérieure : poids $\vec{P}$ du projectile. (Nous avons négligé le frottement !)

Accélération

Appliquons la RFD:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{P} = m\vec{a} \qquad m\vec{g} = m\vec{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} = \vec{g}$$

Accélération constante : $a_x = 0$ (1)	$a_y = -g$ (2)



1re Intégration => Vitesse

Comme $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ et $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, les coordonnées de la vitesse sont les primitives des coordonnées de l'accélération.

En prenant la primitive de la relation (1), on obtient : $v_x = C$ (3)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_x = v_0 \cos\alpha$

Remplaçons dans (3) $\Rightarrow$ $C = v_0 \cos\alpha$. Donc : $\boxed{v_x = v_0 \cos\alpha}$ (4)

La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme.

En prenant la primitive de la relation (2), on obtient : $v_y = -gt + C$ (5)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_y = v_0\sin\alpha$.

Remplaçons dans (5) $\Rightarrow$ $C = v_0\sin\alpha$. Donc : $\boxed{v_y = -gt + v_0 \sin\alpha}$ (6)

La projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

2e intégration => Position (équations paramétriques du mouvement)

Comme $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$, les coordonnées de la position sont les primitives des coordonnées de la vitesse.

En prenant la primitive de la relation (4), on obtient : $x = v_0(\cos\alpha)\cdot t + C$ (7)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $x = x_0 = 0$.

Remplaçons dans (7) $\Rightarrow$ C = 0. Donc : $\boxed{x = v_0(\cos\alpha)\cdot t}$ (8)

En prenant la primitive de la relation (6), on obtient : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + C$ (9)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $y = y_0$.

Remplaçons dans (9) $\Rightarrow$ $C = y_0$. Donc : $\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + y_0}$ (10)

Analyse chronophotographique : https://www.youtube.com/watch?v=iBhffPhsQKw

c) La trajectoire et ses caractéristiques

- **Equation cartésienne de la trajectoire**

(8) $\Rightarrow$ $t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$

Dans (10) $\Rightarrow$ $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha + y_0$ (11)

C'est l'équation d'une parabole courbée vers la bas. Simulation : http://ggbtu.be/mH2JxVgyX

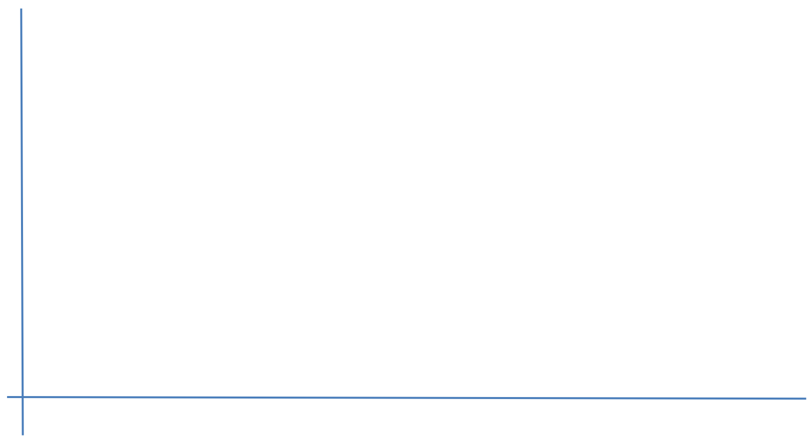
- **Position du point d'impact P sur le sol**

Pour P, y = 0. Remplaçons dans l'équation (11): $\boxed{-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha + y_0 = 0}$ (12)

Cette équation du deuxième degré a en principe deux racines et il faut éliminer celle qui correspond à une valeur de x<0.

Expérience : Mesurer v_0= α= et y_0= (au dessus du sol) et résoudre l'équation du 2nd degré pour prédire l'abscisse théorique x_P =

Figure :



- **Durée de vol et angle d'impact (dans un exercice)**

  Résoudre l'équation du 2nd degré : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + y_0 = \mathbf{0}$

  pour trouver la valeur numérique du temps de vol t_P.

  t_P permet ensuite de calculer les coordonnées de $\vec{v}_P$ juste avant l'impact :

  $$v_{Px} = v_0(\cos\alpha) \quad \text{et} \quad v_{Py} = -g\cdot t_P + v_0(\sin\alpha)$$

  Angle θ *de* $\vec{v}_P$ avec Ox au point d'impact : $\tan\theta = \frac{v_{Py}}{v_{Px}}$ puis prendre $\tan^{-1}$.

  L'angle au départ α est différent de l'angle à l'arrivée θ (négatif ou en valeur absolue).

- **Position du point d'impact P au cas particulier où $y_0 = 0$ (même hauteur)**

L'équation (12) s'écrit maintenant : $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha = 0$

Il faut donc que: soit x = 0, soit $-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{2\cdot v_0{}^2\cdot\cos^2\alpha}x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Donne x =

1ére solution: $x_1 = 0$ (point de lancement)

2e solution: $x_2 = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \boxed{x_P = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}}$ (13)

Expérience : *Mesurer* v_0*=* *α=* *et tirer sur la table*

Portée théorique à même hauteur x_p*=*

* Remarque 1

La relation (13) permet de calculer α pour une valeur donnée de v_0 et de x_P

$$\sin(2\alpha) = \frac{g\cdot x_P}{v_o^2} \quad \textit{donne} \quad \alpha = \frac{1}{2}\cdot\sin^{-1}\left(\frac{g\cdot x_P}{v_0^2}\right)$$

Cette équation trigonométrique admet deux solutions α_1 et α_2 telles que :

$2\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1$ ou bien : $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0, une même portée x_P est atteinte pour deux angles de tir différents (si α est différent de 0°, 45° et 90°). Ces deux angles sont complémentaires.

* Remarque 2

x_P dépend de l'angle de tir; pour une valeur donnée de v_0 elle est maximale si :

$\sin 2\alpha = 1$
$2\alpha = 90°$
$\alpha = 45°$ (uniquement même hauteur !!)

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0, la portée x_P est maximale pour $\alpha = 45°$.

- **Position du sommet S (altitude maximale atteinte)**

En S, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle :

$$v_y(S) = 0 \Leftrightarrow -gt_S + v_0 \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

d'où pour l'abscisse : $x_S = v_0 \cdot cos\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$

Remplaçons dans (10): $y_S = -\frac{1}{2}gt_S^2 + v_0(sin\,\alpha) \cdot t_S + y_0$

pour l'altitude maximale on obtient alors:

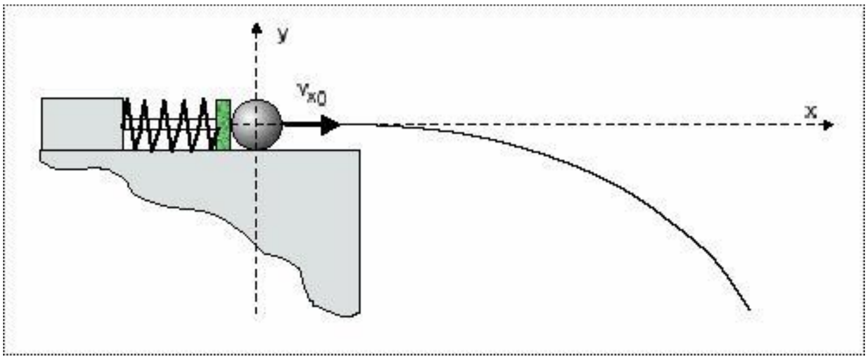
$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) + y_0$$

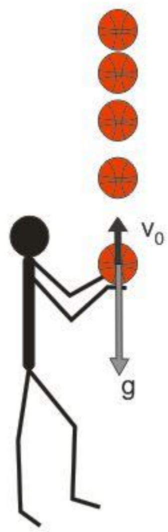
Finalement: $\boxed{y_S = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + y_0}$

Expérience : Pour un tir à même hauteur le temps de vol permet de calculer y_S.

- **Cas particuliers**

α=0° tir horizontal à partir de l'origine. $x = v_0 \cdot t$ $y = -½ \cdot g \cdot t^2$

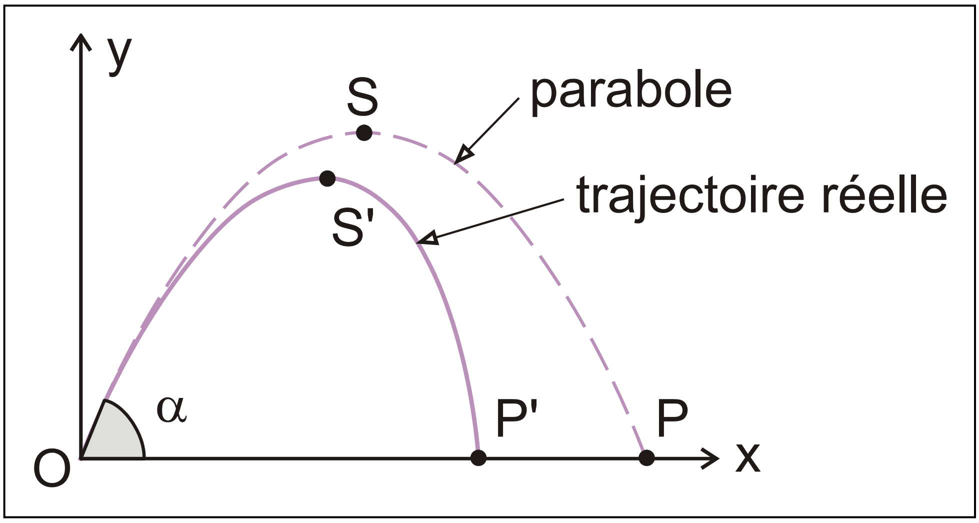




α=90° tir vertical à partir de l'origine : $x=0$ $y = v_0 \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$

- **Tir réel**

En présence du frottement de l'air, la trajectoire n'est plus symétrique et les valeurs $y_{S'}$ et de $x_{P'}$ sont nettement inférieures à celles qu'on vient de calculer.



Simulation : https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_fr.html

Interactive physics.

Exemple :

On a une machine à tirer des projectiles. Elle communique aux projectiles toujours la même vitesse initiale. Pour un angle de tir α=45°, la portée vaut ____m. Déduire la vitesse initiale.

a) Trouver la portée pour un angle de tir de 60°.

b) Existe-t-il un autre angle donnant la portée précédente.

Expérience avec jet d'eau qui explique comment la parabole change si on change l'inclinaison.

https://www.geogebra.org/m/nSFmEcvd