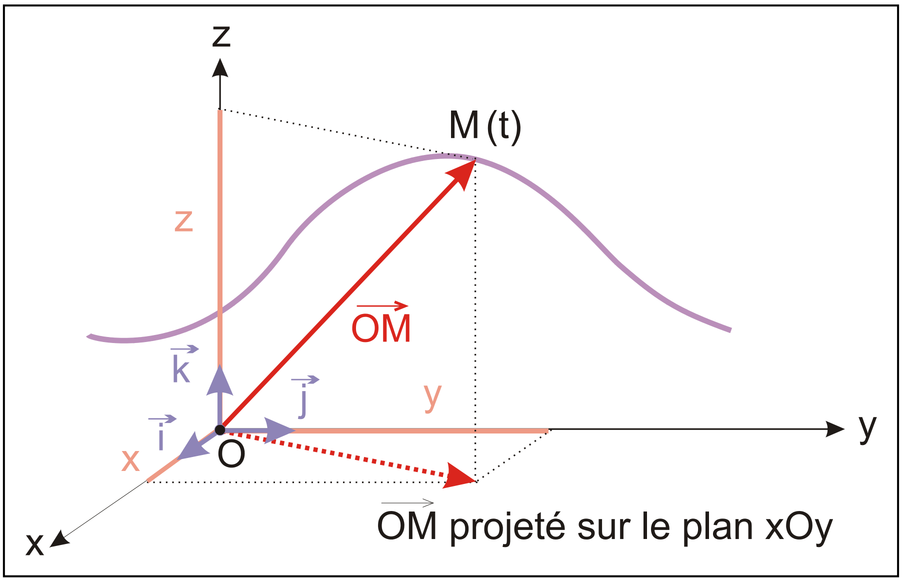
A1: Grandeurs cinématiques et MCU

1. Position par rapport à un référentiel

a) Repère cartésien (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) (lié au référentiel)

Nous utiliserons ce référentiel si la trajectoire est rectiligne ou parabolique (tir oblique, ...)

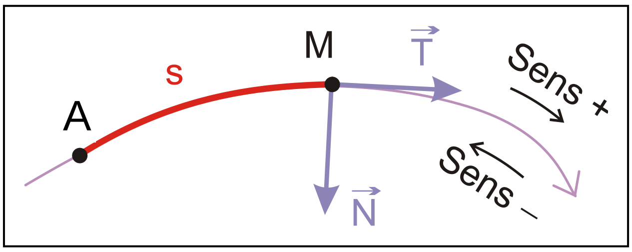


La position du mobile M est repérée par son vecteur position : $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

b) Base de Frenet ($\vec{T}$, $\vec{N}$) (lié au mobile)

Nous utiliserons cette base si la trajectoire est circulaire/elliptique (satellites, charges dans un champ magnétique, ...). La référence du mouvement O reste fixe.



La trajectoire est munie d'un point de départ A. Elle est orientée.

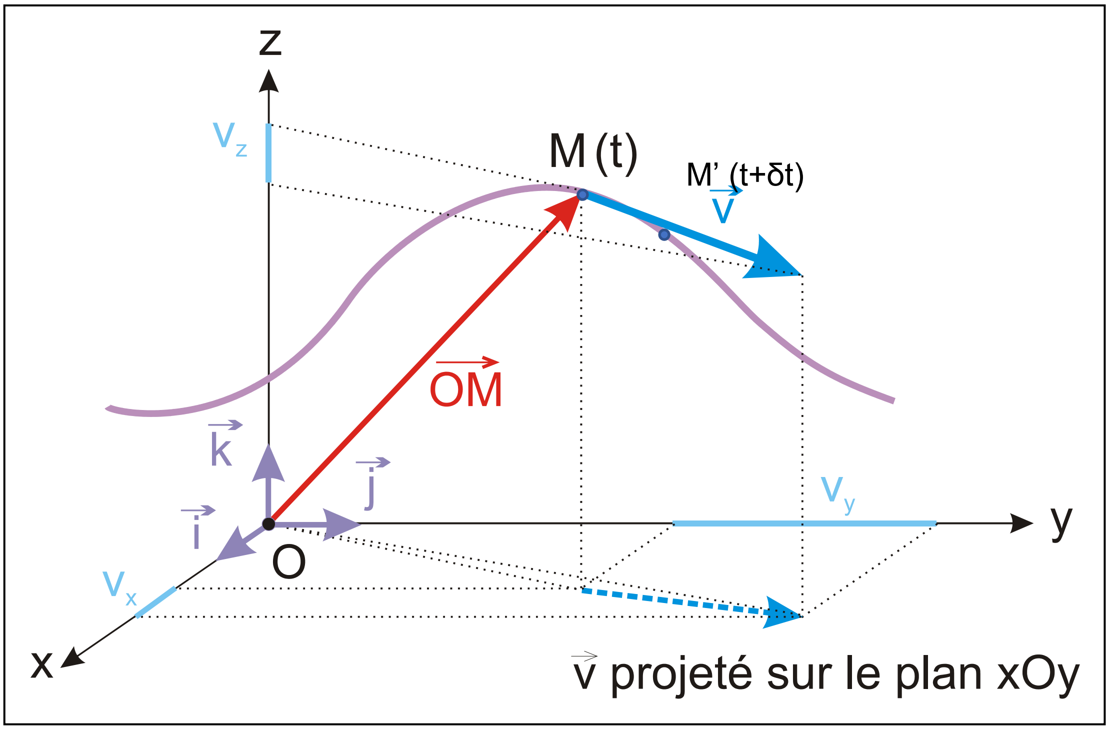
La position du mobile M est repérée par son abscisse curviligne s.
Le repère de Frenet est lié au point M. Il comporte deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

- $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens+ de la trajectoire.
- $\vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

Si la trajectoire n'est pas plane on ajoute $\vec{k}$ perpendiculaire à $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

2. Vitesse par rapport à un référentiel

a) Définition



$$\vec{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\,\overrightarrow{OM}}{\delta t} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La vitesse instantanée $\vec{v}$ est la dérivée de la position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

La vitesse exprime la rapidité avec laquelle la position varie.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

b) Coordonnées cartésiennes

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

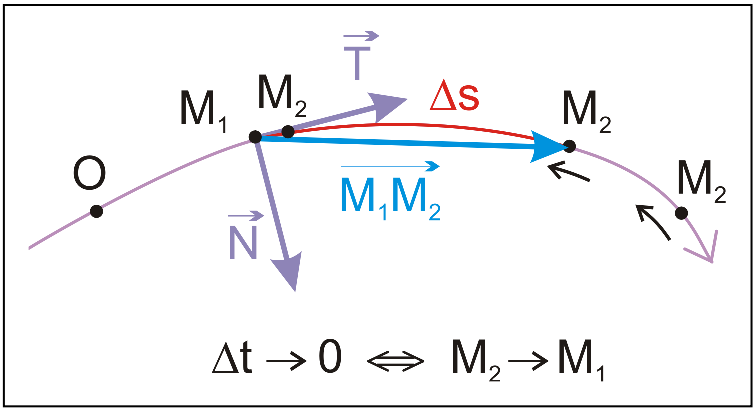
avec $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

c) Coordonnées de Frenet

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_T \\ v_N \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_T\vec{T} + v_N\vec{N}$$

Comme $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire $v_N = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_T \cdot \vec{T}$

Définition de la vitesse : $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = t_2 - t_1$

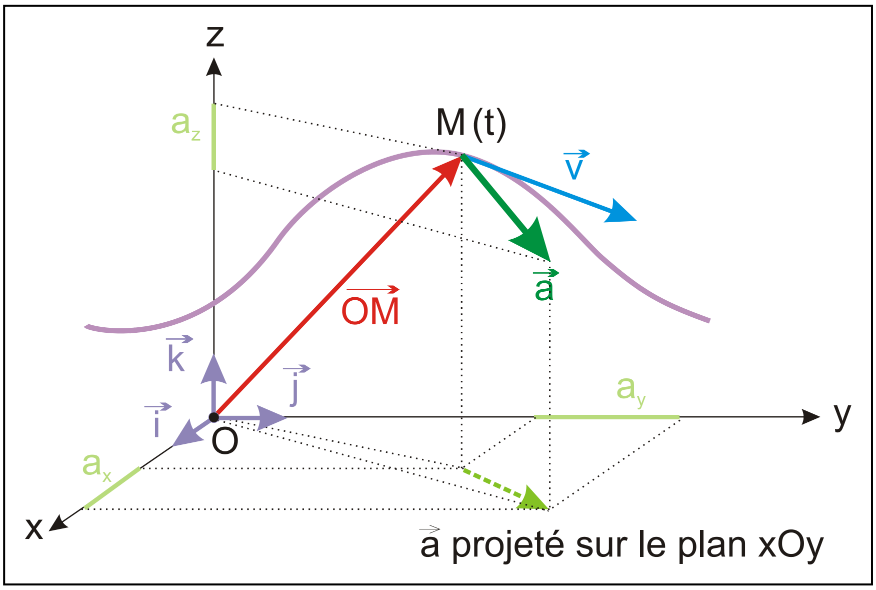


Si $\Delta t \to 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \to \Delta s\vec{T} \Rightarrow \vec{v} = \left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right) \cdot \vec{T}$ Δs et M_1M_2 se confondent.

Finalement $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T} \Rightarrow$ $\boxed{v_T = \dfrac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad v_N = 0}$

3. Accélération par rapport à un référentiel

a) Définition



$$\vec{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée de la vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps.

L'accélération exprime la rapidité avec laquelle le vecteur vitesse varie.

Comme $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée seconde de la position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

b) Coordonnées cartésiennes

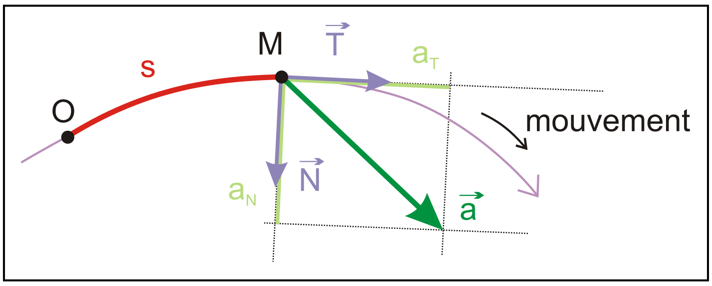
$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2)$$

avec $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z$

ou $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$

c) Coordonnées de Frenet

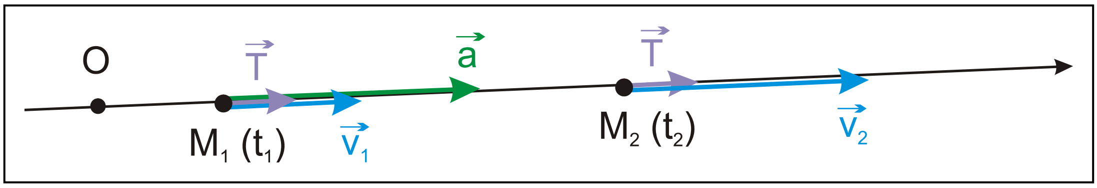
$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_T \\ a_N \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$



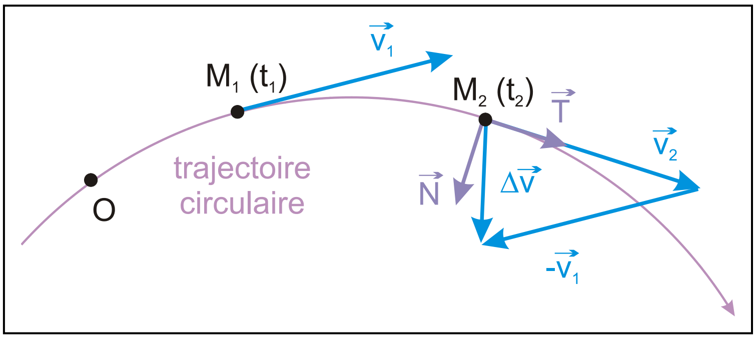
$\vec{a}$ exprime la rapidité avec laquelle $\vec{v}$ varie
- en norme a_T (changement de la vitesse)
- en direction a_N (déviation vers l'intérieur)

- **Mouvement rectiligne**: $\vec{a} \,//\, \vec{v}$: $\vec{a} = a_T\vec{T}$ et $a_N = 0$

  $a_T = accélération\ linéaire = \frac{dv_T}{dt}$ avec v_T=vitesse avec signe selon l'axe du mouvement.



- **Mouvement circulaire uniforme de rayon R**: v constant $\Rightarrow a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0$ et $\vec{a} = a_N\vec{N}$



a_N=accélération centripète = $\frac{v^2}{R}$ cf. démonstration sous 4. pour MCU

Ces deux formules se généralisent pour tout mouvement curviligne avec un rayon de courbure local R. (cf. kissing circle).

4. Mouvement circulaire uniforme (MCU)

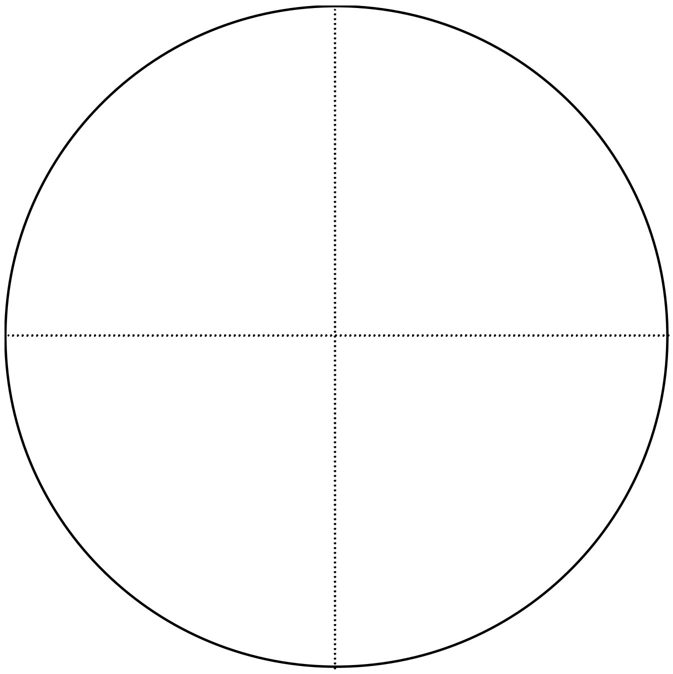
a) Définitions :

Le point M part à t=0 de A à vitesse constante sur un cercle de rayon R.
Il est repéré par :

son abscisse curviligne : **s=v·t**
avec v=vitesse linéaire en m/s

son abscisse angulaire : **θ=ω·t**
avec ω=vitesse angulaire en rad/s

Relations :
s= R·θ avec **θ en rad !!**
v=R·ω
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T=période en s



b) Repérage en coordonnées cartésiennes :

- Position :

x= R·cosθ $= R \cdot cos(\omega t)$ y= R·sinθ $= R \cdot sin(\omega t)$

- Vitesse par dérivation :

$v_x = -\omega R \cdot sin(\omega t)$ $v_y = \omega R \cdot cos\,(\omega t)$
Vitesse en norme : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R$
VectoriellemenT. $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\omega R} \cdot \vec{\boldsymbol{T}}$ **(vitesse toujours tangentielle)**

- Accélération par 2e dérivation :

$a_x = -\omega^2 R \cdot cos(\omega t)$ $a_y = -\omega^2 R \cdot sin(\omega t)$
$= -\omega^2 x$ $= -\omega^2 y$
Accélération en norme : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R$
Vectoriellement comme: $\overrightarrow{OM} = -R \cdot \vec{N}$ et $\vec{a} = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{OM}$
on a **:** $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega^2 R} \cdot \vec{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$ **(accélération centripète)**

c) Force centripète

En appliquant la RFD dans un repère galiléen qui ne tourne pas avec le système on obtient la force (résultante) responsable du MCU d'une masse m

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\omega^2 R} \cdot \vec{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$$ **(force centripète)**

Exemple : Pendule conique

Rem : La force centrifuge est une force « fictive » ressenti par un passager dans son repère tournant non-galiléen. Elle a même norme mais sens opposé à la force centripète.