A. Cinématique et dynamique

A0. Resumé de mathématiques

a) Dérivée

Dérivée de f(x) au point x: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Notations physiques pour x(t): $x'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

devient $\dot{x} = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

Si x(t) représente l'évolution d'une coordonnée au cours du temps, la fonction dérivée $\dot{x}(t)$ se calcule d'après les règles établies en mathématiques et correspond à l'évolution de la vitesse instantanée au cours du temps.

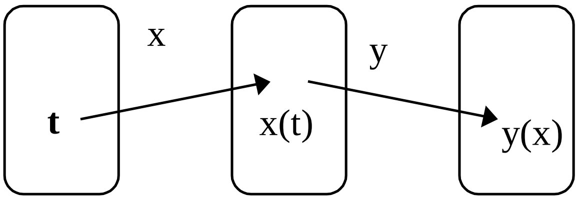
Lors d'une étude expérimentale on n'obtient généralement pas la fonction x(t) pour t <u>continu</u>. La série de mesures donne les valeurs pour x à des instants t=0, τ, 2τ,... <u>discrets</u>. On peut alors calculer une valeur approchée de la vitesse instantanée (=point dérivée) par la formule:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{x(t+\tau)-x(t-\tau)}{2\tau} = \frac{\delta x}{\delta t}$$

Dans ces notations dx, dt désignent des variations infiniment petites et δx, δt des petites variations qui restent mesurables avec une précision suffisante.

Dérivée seconde: $x''(t) = \ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Dérivée d'une fonction composée:



$(y \circ x)'(t) = y(x(t))' = y'(x(t)) \cdot x'(t)$

notation physique: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

Exercice : x(t)=v·t et E(x)=½·k·x²
Calculer la dérivée dE/dt

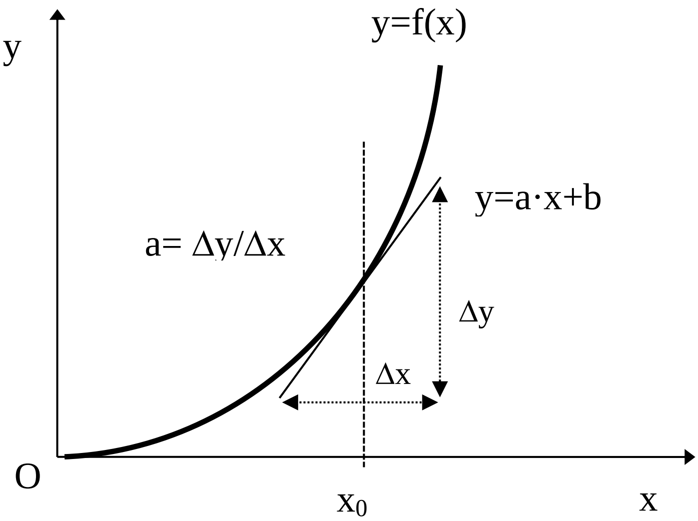
Signification géométrique:

La dérivée f ' au point x_0 donne la pente a de la tangente à la courbe y=f(x) au point d'abscisse x_0.

$a = f'(x_0)$

Si on prend la même échelle sur les 2 axes Ox et Oy, la pente a peut s'exprimer à l'aide de l'angle d'inclinaison α

$a = \Delta y/\Delta x = \tan\alpha$



b) Primitive

Parfois on connaît f(x) et on cherche une fonction F(x) tel que F'(x)=f(x). Dans ce cas F(x) est une primitive de f(t). L'ensemble des primitives de f est formé par les fonctions F(x) + C. En physique la constante C est déterminée par les conditions initiales pour x=0.

On note: $f(x) = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x) \cdot dx$

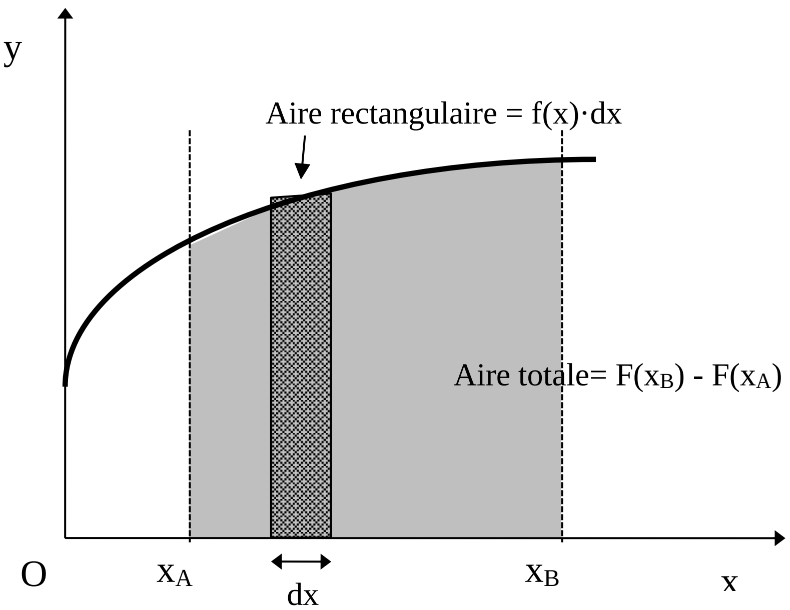
Intégration = rechercher la primitive = opération réciproque de la dérivation

Signification géométrique:
L'aire délimitée par la courbe f(x) entre les points x_A et x_B correspond à la variation de la primitive entre ces points.
On note:
Aire ≈ somme des aires rectangulaires

$$\approx \sum_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

$$\text{Aire} = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

$$= \left[F(x)\right]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$$



Remarque : En physique la variable standard x et souvent le temps t.
Ainsi Trajet = Aire en dessous de v(t) $x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int v(t)\,dt + x_0$ *(cf. 2e)*

TABLEAU des DERIVEES et PRIMITIVES utiles en PHYSIQUE

primitive F(t)	fonction f(t)	dérivée f '(t)
$a \cdot t$	a	0
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t + C$	$a \cdot t + b$	a
$\frac{1}{n+1} \cdot t^{n+1}$	t^n	$n \cdot t^{(n-1)}$
$-\frac{1}{a} \cdot \cos(a \cdot t + b)$	$\sin(a \cdot t+b)$	$a \cdot \cos(a \cdot t+b)$
$\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot t + b)$	$\cos(a \cdot t+b)$	$-a \cdot \sin(a \cdot t+b)$
e^t	e^t	e^t
ln t	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$