# A. Cinématique et dynamique

## A0. Resumé de mathématiques

### a) Dérivée

Dérivée de f(x) au point x: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Notations physiques pour x(t): $x'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

devient $\dot{x} = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

Si x(t) représente l'évolution d'une coordonnée au cours du temps, la fonction dérivée $\dot{x}(t)$ se calcule d'après les règles établies en mathématiques et correspond à l'évolution de la vitesse instantanée au cours du temps.

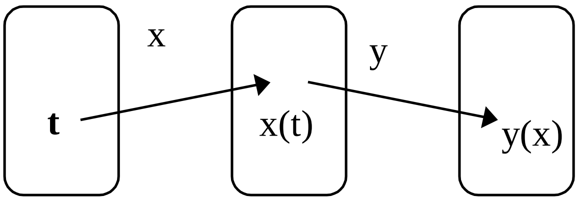
Lors d'une étude expérimentale on n'obtient généralement pas la fonction x(t) pour t continu. La série de mesures donne les valeurs pour x à des instants t=0, $\tau$, $2\tau$,... discrets. On peut alors calculer une valeur approchée de la vitesse instantanée (=point dérivée) par la formule:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{x(t+\tau) - x(t-\tau)}{2\tau} = \frac{\delta x}{\delta t}$$

Dans ces notations dx, dt désignent des variations infiniment petites et $\delta x$, $\delta t$ des petites variations qui restent mesurables avec une précision suffisante.

**Dérivée seconde:** $x''(t) = \ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

**Dérivée d'une fonction composée:**




$$(y \circ x)'(t) = y(x(t))' = y'(x(t)) \cdot x'(t)$$

notation physique: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

*Exercice : $x(t)=v\cdot t$ et $E(x)=½\cdot k\cdot x^2$*
*Calculer la dérivée dE/dt*

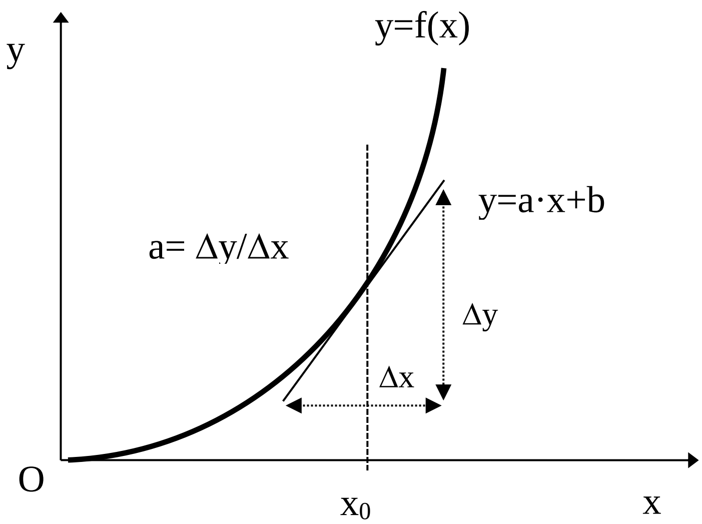
**Signification géométrique:**

La dérivée f ' au point $x_0$ donne la pente a de la tangente à la courbe y=f(x) au point d'abscisse $x_0$.

$a=f'(x_0)$

Si on prend la même échelle sur les 2 axes Ox et Oy, la pente a peut s'exprimer à l'aide de l'angle d'inclinaison $\alpha$

$a = \Delta y/\Delta x= \tan \alpha$



## b) Primitive

Parfois on connaît f(t) et on cherche une fonction F(t) tel que F'(t)=f(t). Dans ce cas F(t) est une primitive de f(t). L'ensemble des primitives de f est formé par les fonctions F(t) + C. En physique la constante C est déterminée par les conditions initiales à l'instant t=0.

On note: $f(t) = F'(t) \Leftrightarrow F(t) = \int f(t) \cdot dt$

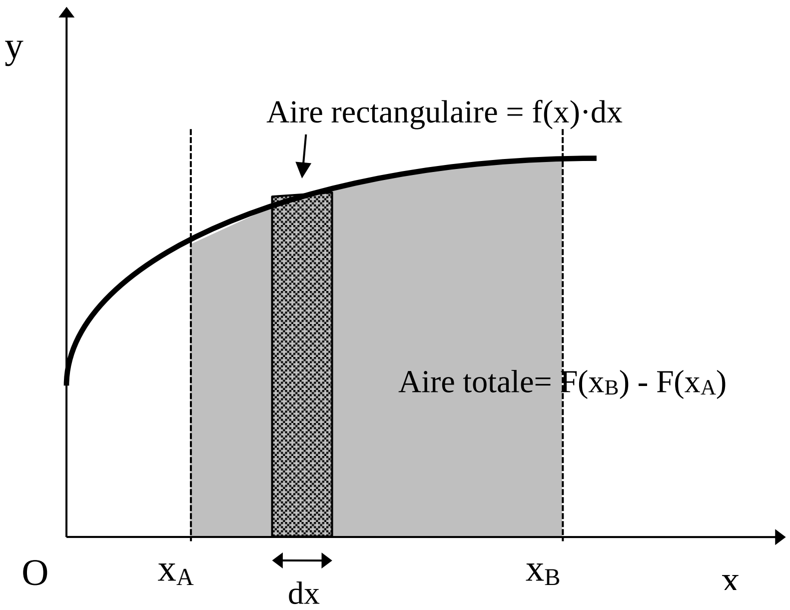
| Intégration = rechercher la primitive = opération réciproque de la dérivation |
|---|

**Signification géométrique:**
L'aire délimitée par la courbe f(x) entre les points $x_A$ et $x_B$ correspond à la variation de la primitive entre ces points.
On note:
Aire ≈ somme des aires rectangulaires

$$\approx \sum_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

$$\text{Aire} = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

$$= \left[F(x)\right]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$$




### *TABLEAU des DERIVEES et PRIMITIVES utiles en PHYSIQUE*

| primitive F(t) | fonction f(t) | dérivée f '(t) |
|---|---|---|
| $a \cdot t$ | a | 0 |
| $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t + C$ | $a \cdot t + b$ | a |
| $\frac{1}{n+1} \cdot t^{n+1}$ | $t^n$ | $n \cdot t^{(n-1)}$ |
| $-\frac{1}{a} \cdot \cos(a \cdot t + b)$ | $\sin(a \cdot t + b)$ | $a \cdot \cos(a \cdot t + b)$ |
| $\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot t + b)$ | $\cos(a \cdot t + b)$ | $-a \cdot \sin(a \cdot t + b)$ |
| $e^t$ | $e^t$ | $e^t$ |
| ln t | $\frac{1}{t}$ | $-\frac{1}{t^2}$ |