4.

Oscillations

© *azure* Shutterstock.com

Sommaire

Les oscillations font partie des phénomènes les plus communs en physique. Un pendule simple, l'aile d'un avion, un pont, un gratte-ciel, la suspension d'une voiture, une molécule diatomique et bien d'autres encore sont des systèmes qui présentent des oscillations. L'analyse de ces systèmes est réalisée avec des méthodes similaires qui seront développées dans la suite pour des systèmes mécaniques simples.

1 Oscillateur mécanique harmonique

Une **oscillation mécanique** est un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre du système.

Les systèmes mécaniques simples qui présentent des oscillations sont constitués par exemple d'un corps solide fixé à un fil ou à un ressort, une corde, une bille se déplaçant dans un bol, etc. Un tel système est appelé **oscillateur mécanique**. Le mouvement d'un oscillateur mécanique est caractérisé et décrit par un certain nombre de grandeurs physiques.

1.1 Caractéristiques

Une oscillation est un mouvement périodique qui se répète après un certain temps, appelé **période** et noté $\boldsymbol{T}$. L'unité SI de période est la seconde (s).

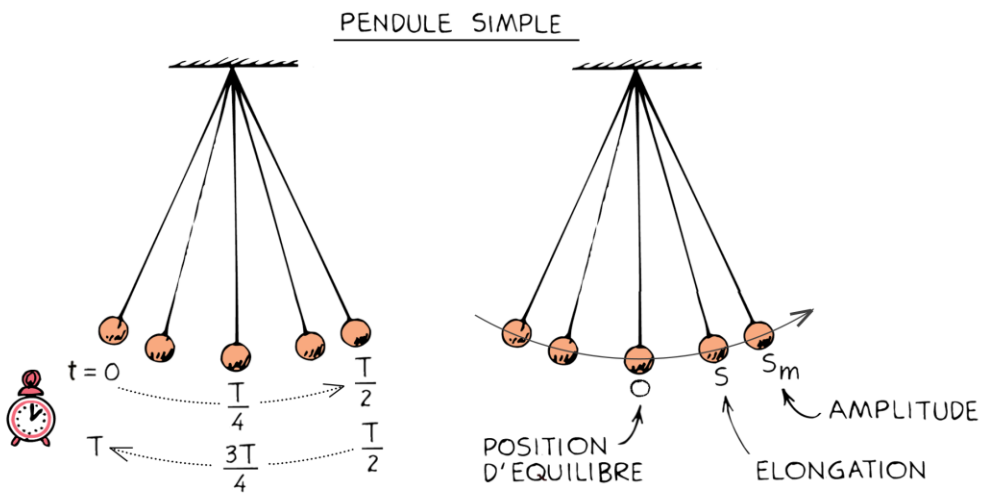
La **fréquence** $\boldsymbol{f}$ de l'oscillateur est égale au nombre d'oscillations par seconde. L'unité SI de fréquence est le hertz (Hz).

Comme la durée d'une oscillation est égale à la période T, le nombre d'oscillations en une seconde est égal à l'inverse de la période, donc :

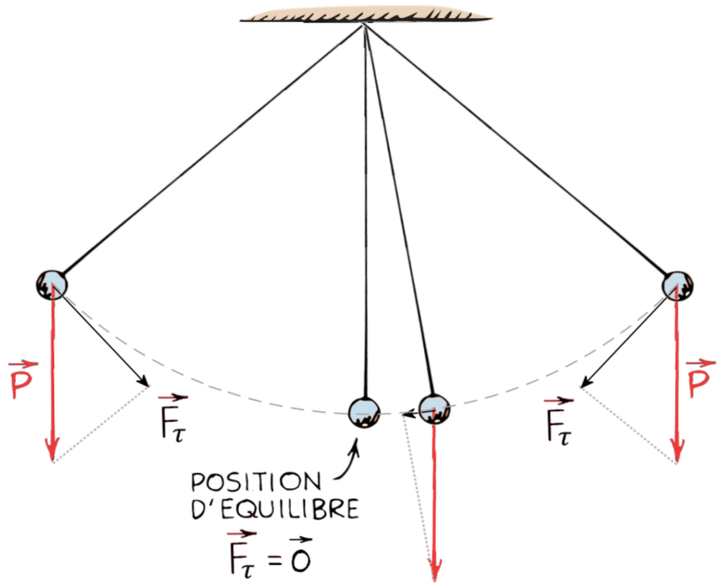
$$f = \frac{1}{T}$$

L'**élongation** $\boldsymbol{s}$ est l'abscisse curviligne de la position du centre de masse du corps solide sur sa trajectoire, pour laquelle on définit un sens positif et dont l'origine est choisie à la position d'équilibre du système.

L'**amplitude** $\boldsymbol{s_m}$ des oscillations est l'élongation maximale.



Quand l'oscillateur s'écarte de sa position d'équilibre, la résultante $\vec{F_\tau}$ des forces tangentielles qui s'appliquent sur le solide doit changer le mouvement du corps de sorte qu'il repasse par sa position d'équilibre. Cette résultante, appelée **force de rappel,** assure les oscillations du système.



Lorsque l'intensité de la force de rappel est proportionnelle à l'élongation, l'oscillateur est appelé **harmonique**. La coordonnée tangentielle de la force de rappel s'écrit alors :

$$F_\tau = -C\, s$$

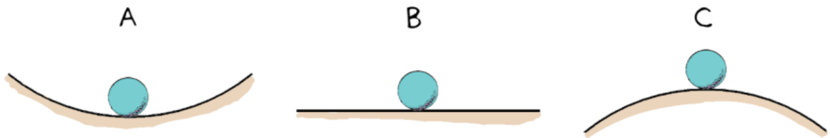
où C est le coefficient de proportionnalité qui dépend des propriétés du système.

Le signe négatif est nécessaire pour que la force de rappel soit en toute position dirigée vers la position d'équilibre. La force s'annule en $s = 0$ où le système est en équilibre.

Le pendule simple est un oscillateur harmonique dans la limite des faibles amplitudes, c'est-à dire pour des amplitudes angulaires inférieures à 10°.

As-tu compris ?

1. Une bille est libre de se déplacer sur un support. Dans quel cas la bille peut-elle effectuer des oscillations ?



2. Quelle condition doit satisfaire un système mécanique pour qu'il puisse présenter des oscillations ? Quelle est la condition supplémentaire pour que ces oscillations soient harmoniques ?

3. Un corps effectue 4 oscillations en 10 s. Sa trajectoire est un segment de droite de longueur 8 cm centré sur sa position d'équilibre. Déterminer :

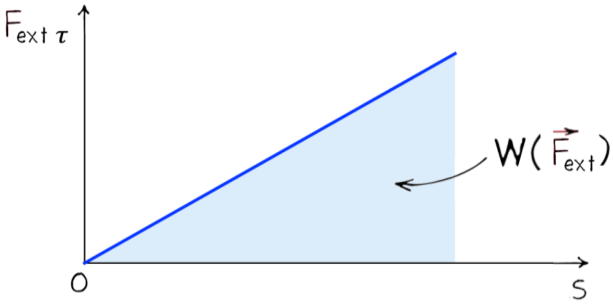
a. les valeurs possibles de l'élongation
b. l'amplitude
c. la période
d. la fréquence

1.2 Expression de l'énergie potentielle

La variation de l'énergie potentielle du système est égale au travail entre la position d'équilibre et la position s d'une force extérieure $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ opposée à la force de rappel :

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = W(\vec{F}_{\mathrm{ext}}) = W(-\vec{F})$$

Ce travail peut être déterminé par la méthode des aires. La représentation de la coordonnée tangentielle $F_{ext\,\tau}$ de la force extérieure en fonction de s est une droite passant par l'origine.



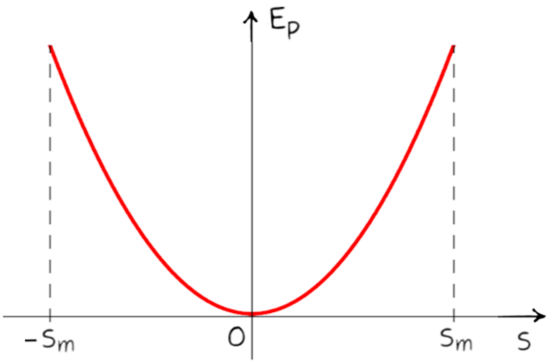
L'aire en dessous de la droite vaut :

$$W(\vec{F}_{\mathrm{ext}}) = \frac{1}{2} F_{ext\,\tau}\, s$$

Avec $F_{ext\,\tau} = -F_\tau = C\,s$ et en fixant l'énergie potentielle dans la position d'équilibre à zéro, l'expression pour l'énergie potentielle est :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} C\, s^2 \tag{1}$$

La représentation graphique de l'énergie potentielle E_{p} d'un oscillateur harmonique en fonction de l'élongation s est une parabole symétrique autour de la position d'équilibre $s = 0$.



1.3 Équation différentielle du mouvement

1.1.1 Par la relation fondamentale de la dynamique

En appliquant la deuxième loi de Newton au corps de masse m, dans la direction tangentielle :

$$m\,a_\tau = F_\tau \Leftrightarrow a_\tau = \frac{F_\tau}{m}$$

Avec $a_\tau = \ddot{s}$ et $F_\tau = -C\,s$, il vient :

$$\ddot{s} = -\frac{C}{m} s$$

Cette relation est l'**équation différentielle** du mouvement de l'oscillateur harmonique.

1.1.2 Par le principe de la conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système oscillant. Pour un système isolé et en absence de frottements l'énergie mécanique est conservée.

L'énergie cinétique du système se réduit à celle du corps de masse m :

$$E_\mathrm{c} = \tfrac{1}{2} m\, v_\tau^{\,2}$$

La conservation de l'énergie mécanique se traduit par :

$$E_{méc} = \text{constante} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}E_{méc}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2} m\, v_\tau^{\,2} + \tfrac{1}{2} C\, s^2\right)}{\mathrm{d}t} = 0$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\, m\, 2\, v_\tau\, \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\, C\, 2\, s\, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$$

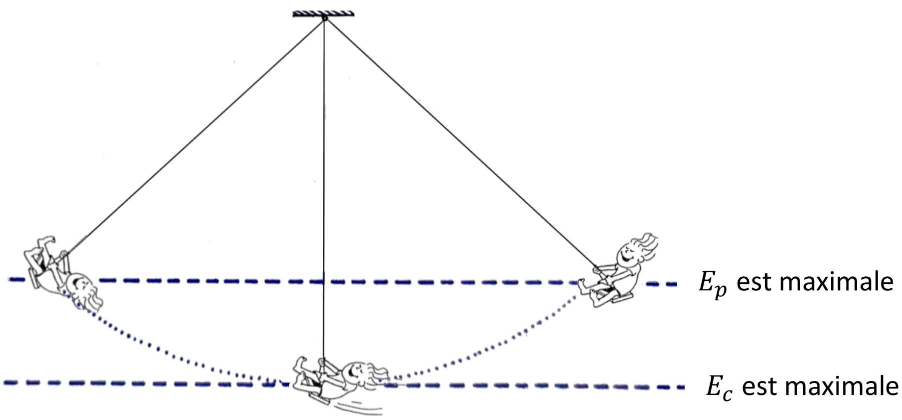
Avec $\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} = a_\tau = \ddot{s}$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_\tau$ l'expression devient :

$$m\, v_\tau\, \ddot{s} + C\, s\, v_\tau = 0 \Leftrightarrow m\, v_\tau\, (\ddot{s} + \frac{C}{m}\, s) = 0$$

Cette équation est vérifiée à tout instant sous la condition :

$$\ddot{s} = -\frac{C}{m} s$$

On retrouve l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur.



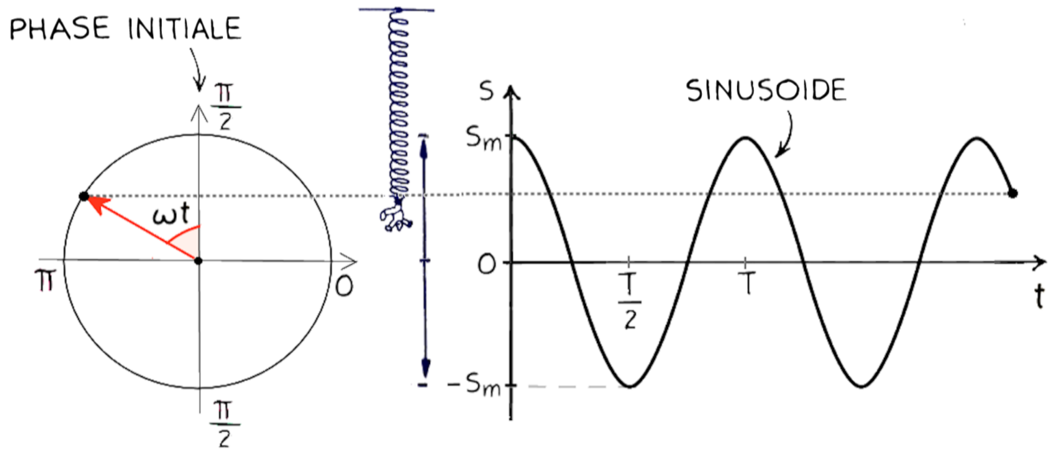
1.4 Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle est l'équation horaire $s(t)$ du mouvement. L'enregistrement du mouvement d'un oscillateur harmonique montre que son équation horaire est une sinusoïde qui peut être paramétrisée de la façon suivante[1] :

$$s(t) = s_\mathrm{m}\,\sin(\omega\,t + \varphi)$$

où s_m, ω et φ sont les paramètres de l'oscillation.

- L'élongation s prend des valeurs entre $-s_\mathrm{m}$ et $+s_\mathrm{m}$. Le paramètre s_m est l'**amplitude** de l'oscillation. La valeur de l'élongation s à l'instant $t = 0$ est donnée par $s_0 = s_\mathrm{m}\,\sin(\varphi)$.
- Le paramètre φ, appelé **phase initiale**, tient compte de la valeur initiale de l'élongation et du signe de la vitesse initiale. Son domaine de définition est : $-\pi < \varphi \leq \pi$. La phase initiale peut être déduite du cercle trigonométrique en considérant la projection sur l'axe vertical[2] :



- L'argument du sinus, $\omega\,t + \varphi$, est la **phase** de l'oscillation à l'instant t exprimée en radians.
- Le paramètre ω est appelé la **pulsation** de l'oscillation. Il indique de combien la phase varie par unité de temps. En particulier, lorsque le temps t augmente d'une période T :

  $$s(t + T) = s_\mathrm{m}\,\sin(\omega\,t + \varphi + \omega\,T)$$

  la phase augmente de 2π de sorte que :

  $$\omega\,T = 2\pi$$

  D'où :

  $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,f$$

  L'unité SI de pulsation est l'inverse de la seconde (s^{-1}).

En dérivant $s(t)$ par rapport au temps on obtient la vitesse du corps :

$$\dot{s} = v_\tau = s_\mathrm{m}\,\omega\,\cos(\omega\,t + \varphi)\,.$$

Il en résulte la valeur maximale de la vitesse : $v_{max} = s_\mathrm{m}\,\omega$.

---

[1] On peut également remplacer le sinus par un cosinus.

[2] Dans ce cours, nous allons nous limiter aux phases initiales $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$.

Une deuxième dérivation donne son accélération :

$$\ddot{s} = a_\tau = -s_\mathrm{m}\,\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi) = -\omega^2\,s\,.$$

Il en résulte la valeur maximale de l'accélération : $a_{max} = s_\mathrm{m}\,\omega^2$.

La sinusoïde vérifie l'équation différentielle du mouvement sous condition que :

$$\omega^2 = \frac{C}{m}$$

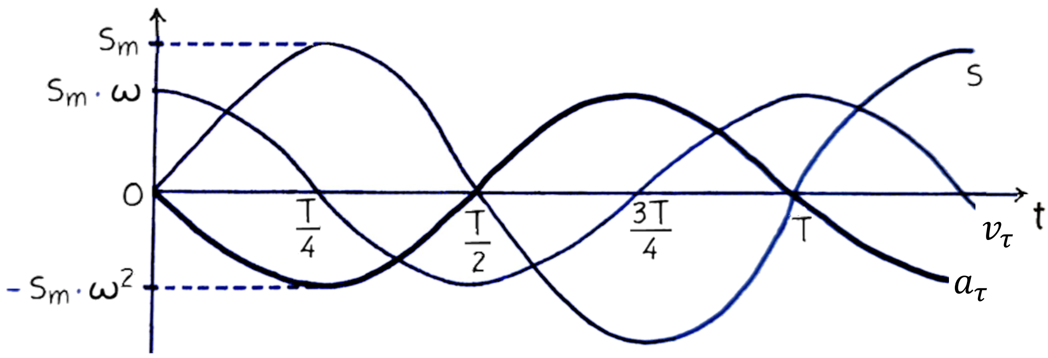
La racine positive de cette équation donne la pulsation des oscillations :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

Le seul paramètre de la sinusoïde qui dépend des propriétés de l'oscillateur est la pulsation. L'amplitude et la phase initiale sont déterminées par les conditions initiales.

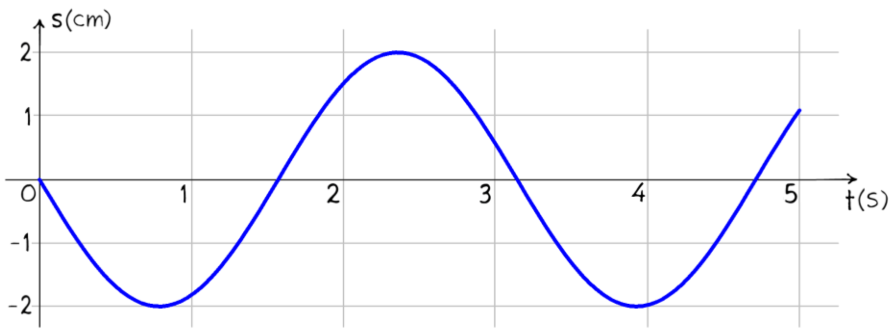
La période des oscillations s'obtient par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \qquad (2)$$



■ **As-tu compris ?**

4. La figure montre la représentation graphique de l'élongation d'un pendule élastique en fonction du temps.



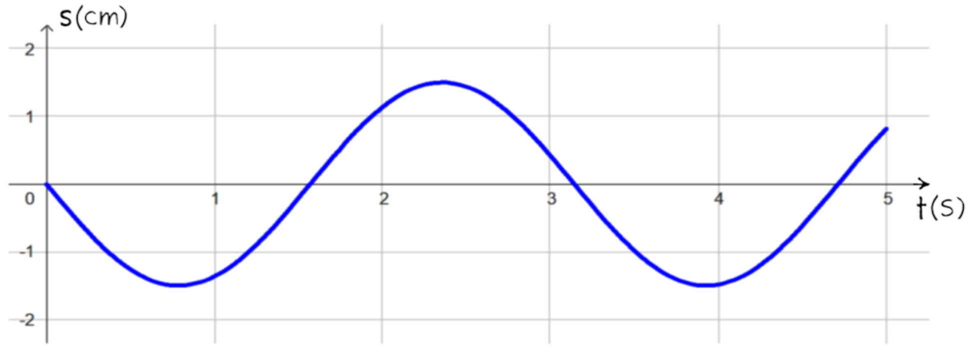
a. Déterminer l'amplitude et la période des oscillations.

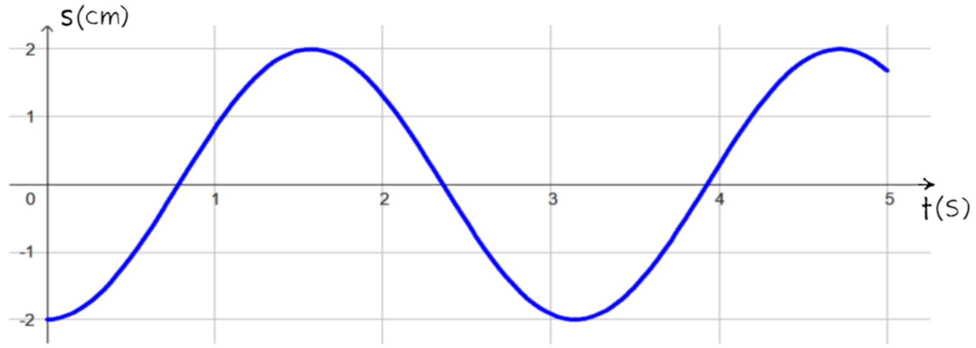
b. Écrire l'équation horaire $s(t)$ du mouvement du pendule.

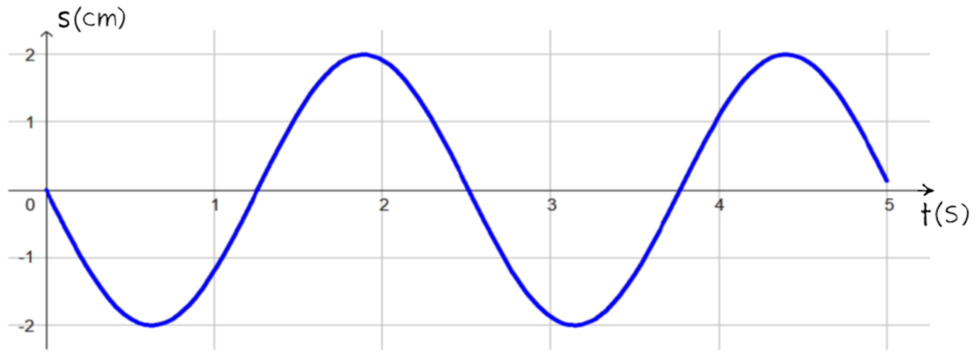
c. Écrire l'équation horaire $v_\tau(t)$ de la vitesse du corps solide.

d. Ajouter au graphique la vitesse v_τ en fonction du temps.

5. Les sinusoïdes suivantes ont été obtenues à partir de celle représentée à l'exercice 4 page 8 en faisant varier un des paramètres de cette équation horaire. Indiquer en-dessous de chacun des graphiques le paramètre qui a changé.







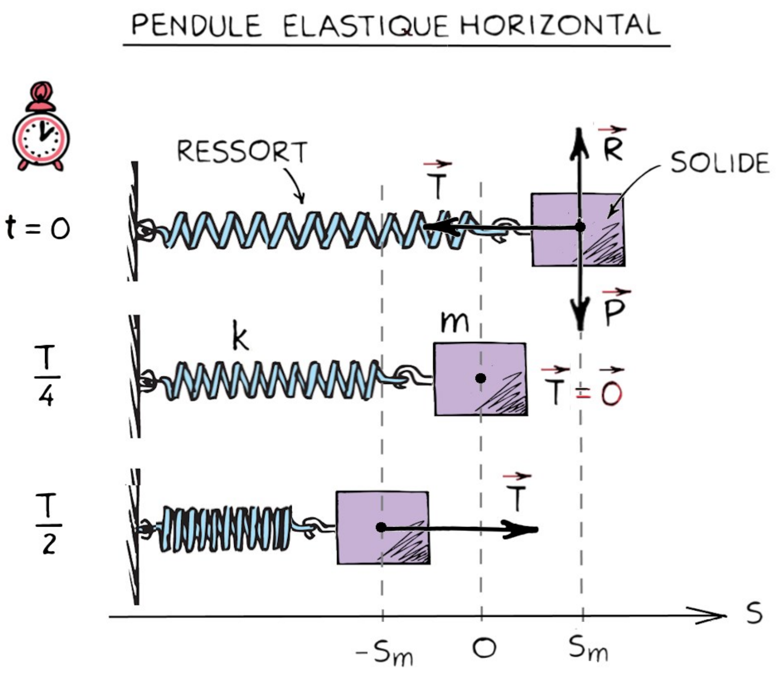
1.5 Exemples d'oscillateurs harmoniques

Pour un système oscillant donné, l'étude des forces appliquées au corps solide permet de déterminer leur résultante, de vérifier la condition $F_\tau = -C\,s$ et de déterminer le coefficient de proportionnalité C. L'oscillateur n'est en général harmonique que sous certaines conditions sur l'élongation qu'il faudra préciser.

1.1.3 Pendule élastique

Le pendule élastique le plus simple est constitué d'un corps solide de masse m fixé à un ressort de raideur k et de masse négligeable. Si le corps se déplace sur un support horizontal le système est appelé **pendule élastique horizontal**. En absence de support le mouvement est vertical et le système est appelé **pendule élastique vertical**.

Sur le corps d'un pendule élastique horizontal s'exercent trois forces : le poids $\vec{P}$ du corps, la réaction $\vec{R}$ du support et la tension $\vec{T}$ du ressort. La force de frottement est supposée négligeable.



La tension du ressort est la seule force ayant une coordonnée tangentielle non nulle. C'est la force de rappel de l'oscillateur élastique horizontal. D'après la loi de Hooke elle s'écrit :

$$F_\tau = T_\tau = -k\,s$$

Les pendules élastiques horizontal et vertical sont des oscillateurs harmoniques avec un coefficient de proportionnalité égal à la raideur du ressort :

$$C = k$$

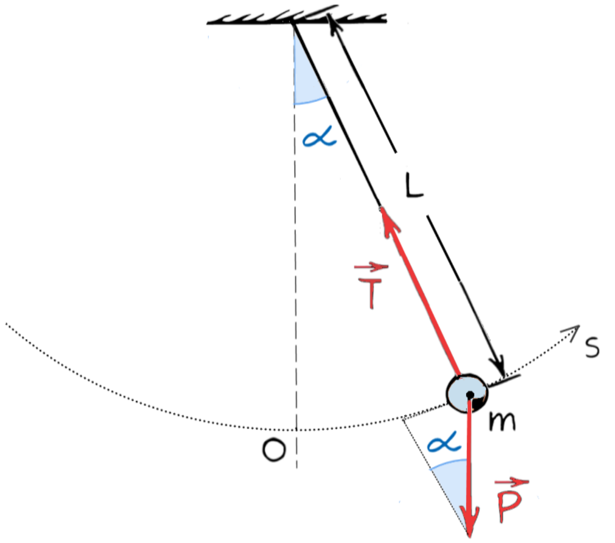
Il est à noter que la loi de Hooke n'est valable que dans le domaine d'élasticité du ressort, donc pour des valeurs de $|s|$ inférieures à une certaine valeur limite.

En accord avec la relation (2), la période des oscillations d'un pendule élastique est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.1.4 Pendule simple

Le pendule simple est constitué d'un corps solide quasi ponctuel de masse m fixé à un fil non extensible ou une tige le longueur L et de masse négligeable. Sur le corps d'un pendule simple s'exercent deux forces : le poids $\vec{P}$ du corps et la tension $\vec{T}$ du fil ou de la tige.



Le poids du corps est la seule force avec une coordonnée tangentielle non nulle. Elle s'écrit :

$$F_\tau = P_\tau = -m\,g\,\sin\alpha$$

Pour des petites valeurs de α en rad, $\sin\alpha$ est approximativement égal à α. Dans cette limite :

$$F_\tau = -m\,g\,\alpha$$

L'abscisse angulaire α s'exprime en fonction de l'élongation α par la relation :

$$s = L\,\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{s}{L}$$

Il vient :

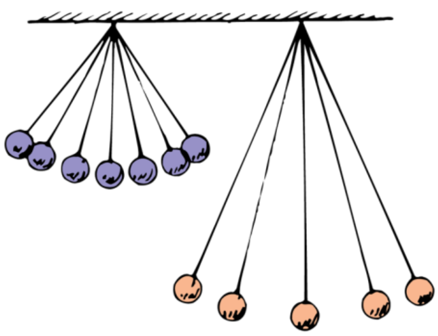
$$F_\tau = -\frac{m\,g}{L}\,s$$

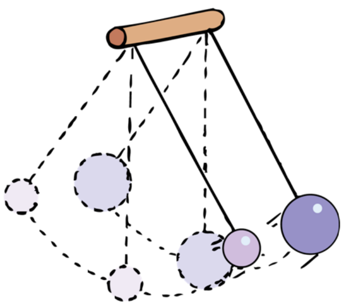
Dans l'approximation des petits angles, c'est-à-dire quand l'élongation s est petite comparée à L, le pendule simple est un oscillateur harmonique. Le coefficient de proportionnalité est donné par :

$$C = \frac{m\,g}{L}$$

En accord avec la relation (2), la période des oscillations d'un pendule simple est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$





■ *As-tu compris ?*

6. Comment évolue la fréquence des oscillations d'un pendule élastique horizontal lorsque :

a. la masse du solide est doublée ?
b. la raideur du ressort est doublée ?
c. l'amplitude des oscillations est doublée ?
Mêmes questions pour un pendule simple.

7. Expliquer pourquoi, en général, les oscillations d'un pendule simple ne sont pas harmoniques. Sous quelle condition ces oscillations sont approximativement harmoniques ?

Exercice résolu

Un solide de masse $m = 300\ \text{g}$ est relié à un ressort à spires non jointives de raideur $k = 0{,}474\ \text{N/m}$. L'axe des abscisses s a la direction du ressort, l'origine des abscisses est la position d'équilibre du centre d'inertie G du solide. À l'instant initial, le centre d'inertie G est relâché à partir de la position $s = -10\ \text{cm}$. Les oscillations se font sans le moindre frottement.

a. Déterminer l'équation horaire du centre d'inertie du solide.
b. Calculer sa vitesse maximale.
c. Calculer la date du premier passage à l'abscisse $s = 4\ \text{cm}$.

Solution :

a. L'équation horaire du centre d'inertie est de la forme :

$$s(t) = s_\text{m}\ \sin(\omega\, t + \varphi)$$

et la vitesse s'écrit :

$$v_\tau(t) = \dot{s}(\text{t}) = s_\text{m}\, \omega\ \cos(\omega\, t + \varphi)\,.$$

Les conditions initiales sont :

$$s(0) = -0{,}1\ \text{m} = s_\text{m}\ \sin(\varphi) \qquad (1)$$
$$v_\tau(0) = 0 = s_\text{m}\, \omega\ \cos(\varphi)\,. \qquad (2)$$

L'équation (2) admet deux solutions pour $-\pi < \varphi \le \pi$: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. L'équation (1), avec $s_m > 0$ est vérifiée pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$:

$$-0{,}1\ \text{m} = s_\text{m}\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où : $s_\text{m} = 0{,}1\ \text{m}$.
La pulsation s'obtient par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}474}{0{,}3}}\ \text{rad/s} = 1{,}26\ \text{rad/s}\,.$$

D'où l'équation horaire du centre d'inertie en unités SI :

$$s(t) = 0{,}1\ \sin\left(1{,}26\, t - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1\ \cos(1{,}26\, t)\,.$$

b. La vitesse maximale est donnée par :

$$v_{max} = s_\text{m}\, \omega = 0{,}1 \cdot 1{,}26\ \text{m/s} = 0{,}126\ \text{m/s}\,.$$

c. L'instant t du premier passage vérifie l'équation :

$$s(t) = 0{,}04 = -0{,}1\ \cos(1{,}26\, t)$$

et donc :

$$\cos(1{,}26\,t) = -0{,}4\,.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$1{,}26\,t = \cos^{-1}(-0{,}4) + k\,2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$1{,}26\,t = -\cos^{-1}(-0{,}4) + k'\,2\pi \qquad k' \in \mathbb{Z}$$

Avec $\cos^{-1}(-0{,}4) = 1{,}98$ on obtient le premier passage pour $k = 0$, donc $t = 1{,}58$ s .

1.6 Généralisation

Tenant compte de la relation (1), La dérivée première de l'énergie potentielle E_p par rapport à l'élongation s s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}s} = C\,s = -F_\tau$$

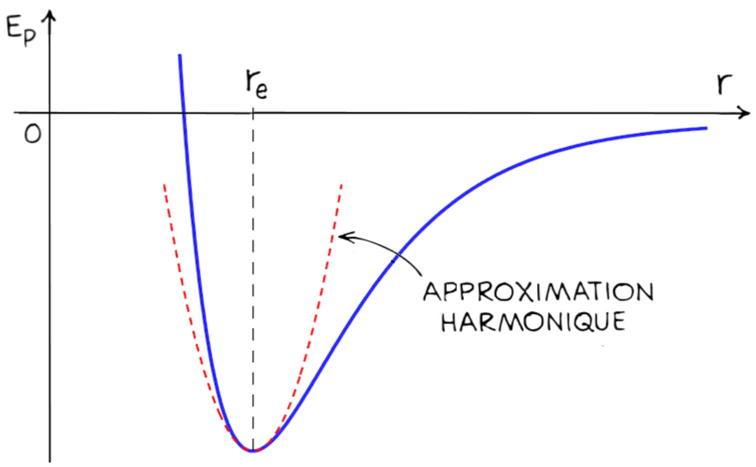
Elle est égale à l'opposé de la coordonnée tangentielle de la force de rappel et s'annule en $s = 0$. La dérivée seconde est positive et égale au coefficient de proportionnalité C :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}s^2} = C$$

La position d'équilibre est donc un minimum de l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique.

Tout système dont l'énergie potentielle E_p en fonction d'une position s présente un minimum est un oscillateur harmonique pour un certain domaine de valeurs de la position. Ceci s'explique par le fait qu'autour de ce minimum la courbe qui représente E_p en fonction de s peut être représentée approximativement par une parabole.

Le coefficient de proportionnalité C est égal à la dérivée seconde de $E_\mathrm{p}(s)$ à la position d'équilibre et dépend des propriétés du système.



La figure montre, en bleu, l'énergie potentielle d'une molécule diatomique en fonction de la distance internucléaire r (courbe de potentiel de Morse). La molécule peut osciller autour de la position d'équilibre r_e. Pour des oscillations dont l'amplitude est beaucoup plus petite que r_e, la molécule peut être considérée comme un oscillateur harmonique.

1.7 Oscillations amorties

L'énergie mécanique d'un oscillateur peut s'exprimer en fonction de l'amplitude des oscillations. Aux extrémités de la trajectoire, quand la vitesse s'annule, la valeur absolue de l'élongation est égale à l'amplitude. L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle maximale :

$$E_{méc} = E_{p\,max} = \frac{1}{2} C\, s_{\mathrm{m}}{}^2$$

La conservation de l'énergie mécanique se traduit par une amplitude constante au cours du temps. En présence d'une force de frottement non négligeable, le travail résistant de cette force fait diminuer l'énergie mécanique qui se transforme progressivement en énergie thermique. Par conséquent l'amplitude des oscillations diminue, les oscillations sont dites **amorties**.

La décroissance de l'énergie dépend des propriétés de la force de frottement. Un cas intéressant est une diminution relative qui reste constante au cours du temps. L'expérience montre qu'une force de frottement exercée par un fluide pour des oscillations à faible vitesse présente cette propriété. Elle se traduit, pour un petit intervalle de temps δt, par l'expression :

$$\frac{\delta E_{méc}}{E_{méc}} = -\frac{2}{\tau}\,\delta\mathrm{t} \Rightarrow \frac{\delta E_{méc}}{\delta\mathrm{t}} = -\frac{2}{\tau}\,E_{méc}$$

où τ est la constante de temps de l'amortissement, le facteur 2 est introduit par convenance et le signe négatif traduit la diminution de l'énergie. Dans la limite $\delta t \to 0$ cette expression s'écrit :

$$\dot{E}_{méc} = -\frac{2}{\tau}\,E_{méc}$$

En substituant l'expression de l'énergie mécanique il vient :

$$\frac{1}{2}\,C\,2\,s_{\mathrm{m}}\,\dot{s}_{\mathrm{m}} = -\frac{2}{\tau}\,\frac{1}{2}\,C\,s_{\mathrm{m}}{}^2$$

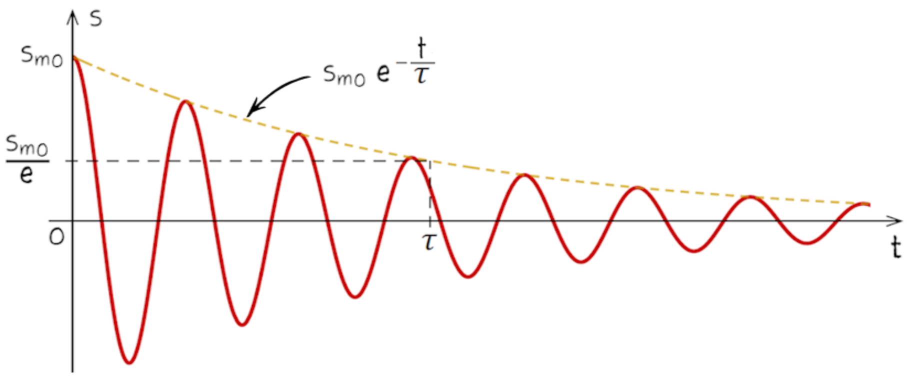
qui se réduit à :

$$\dot{s}_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{\tau}\,s_{\mathrm{m}}$$

La solution de cette équation différentielle est une exponentielle de la forme :

$$s_{\mathrm{m}} = s_{\mathrm{m}0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'amplitude a la valeur initiale $s_{\mathrm{m}0}$ puis décroît exponentiellement avec le temps. Après le temps τ elle est réduite d'un facteur e.



Le mouvement de l'oscillateur n'est pas périodique au sens strict. Il est dit **pseudo-périodique** car, bien que l'amplitude diminue, la durée d'une oscillation, appelée **pseudo-période,** reste constante.

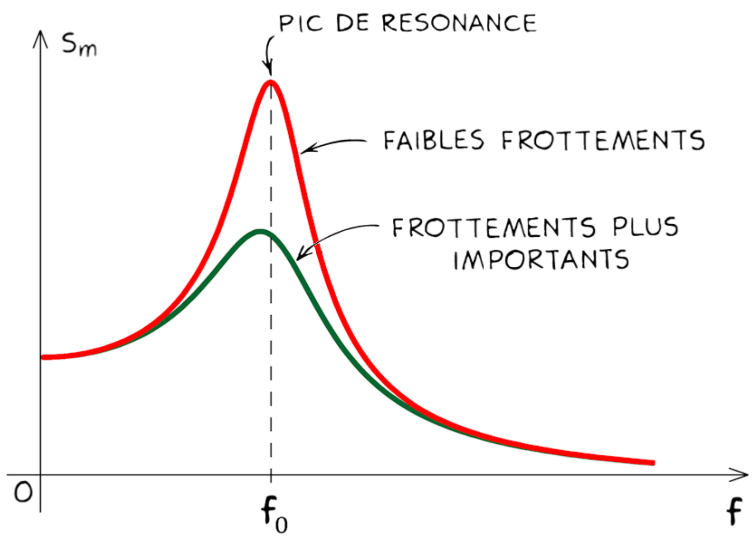
2 Oscillations forcées et résonance

Les oscillations étudiées jusqu'ici sont dites **libres**. Une fois mis hors équilibre, l'oscillateur évolue en tant que système isolé. La fréquence f_0 des oscillations qui en résultent est dite **propre** car elle ne dépend que des propriétés de l'oscillateur.

Les oscillations qui résultent de l'application d'une force extérieure périodique sur le système sont dites **forcées**. La figure ci-contre montre un exemple d'un mouvement forcé par l'application d'une telle force. Le dispositif qui crée ces mouvements périodiques de fréquence f est appelé **excitateur**.

L'étude expérimentale d'un tel système, réalisé avec un excitateur qui crée un mouvement d'amplitude constante et de fréquence variable, permet de faire les observations suivantes :

- En régime établi, après un certain temps, la fréquence des oscillations du système est égale à celle de l'excitateur.
- L'amplitude des oscillations forcées varie avec la fréquence de l'excitateur. En augmentant la fréquence, l'amplitude des oscillations augmente. Elle atteint un maximum lorsque la fréquence de l'excitateur est environ égale à la fréquence propre de l'oscillateur ; c'est le phénomène de **résonance**. L'amplitude diminue lorsque la fréquence de l'excitateur est augmentée au-delà de la fréquence propre.
- La **courbe de résonance** montre l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence de l'excitateur.



L'amplitude à la résonance, c'est à dire sa valeur maximale, dépend de l'intensité des frottements. La résonance peut être :

- **aiguë**, une courbe de résonance pointue avec un maximum important si l'intensité des frottements est faible ;
- **floue**, une courbe de résonance aplatie avec un maximum plus faible si l'intensité des frottements est plus importante.

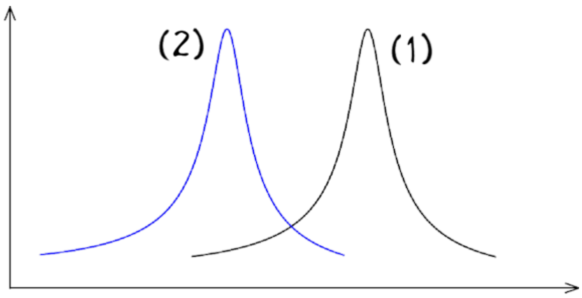
Un oscillateur qui produit le phénomène de résonance est appelé **résonateur**. Le phénomène de résonance peut être utile ou destructif, comme le montrent les exemples suivants :

- Lorsqu'on veut atteindre de grandes amplitudes en étant debout sur une balançoire, on doit pousser avec les jambes. De petites poussées en rythme avec la fréquence propre produisent alors de grandes amplitudes.

- La suspension d'une automobile peut être modélisée par un ressort vertical fixé entre le châssis et l'axe, ce qui constitue un oscillateur. Il arrivait, sur les modèles anciens, que pour certaines vitesses et certaines irrégularités dans la chaussée, l'oscillateur entre en résonance. Afin de limiter cet effet, on ajoute des amortisseurs qui permettent de diminuer l'amplitude du mouvement en cas de résonance.
- Le pont de Tacoma aux États-Unis s'effondra en 1940 après être entré en résonance sous l'action de bourrasques périodiques jouant le rôle d'excitateur. De même, en 1850, le tablier d'un pont suspendu sur la Maine à Angers se rompit au passage d'une troupe marchant au pas cadencé. Le tablier du pont ensemble avec sa suspension constituait un oscillateur mécanique. L'excitation provoquée par les pas cadencés de la troupe l'avait fait entrer en résonance, provoquant sa rupture. Les tabliers des ponts actuels sont arrimés au sol par l'intermédiaire d'amortisseurs qui permettent de limiter le phénomène de résonance.
- La caisse de résonance d'un violon permet de renforcer les notes produites par la vibration des cordes. L'âme est la pièce qui lie les cordes et la caisse de résonance. Elle doit être placée sous le chevalet. La caisse de résonance et la masse d'air qu'elle contient constituent un oscillateur mécanique. Ce dernier possède des fréquences propres de vibration qui dépendent de la forme de la caisse. Les cordes du violon jouent le rôle de l'excitateur, la caisse de résonance celui du résonateur.

Tester vos connaissances

8. La figure montre les courbes de résonance d'un pendule élastique obtenues avec deux masses différentes (1) et (2).



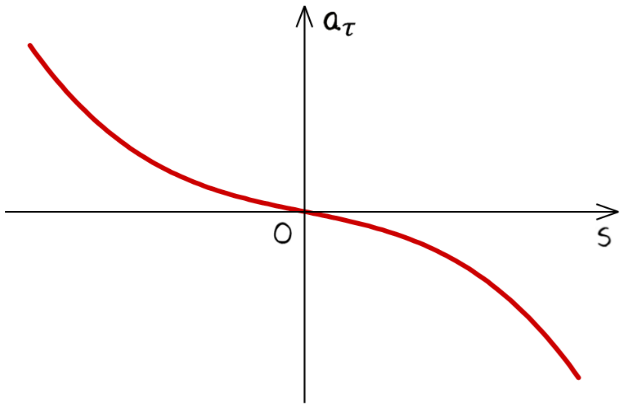
a. Indiquer les grandeurs représentées par les deux axes.

b. Comparer les deux masses m_1 et m_2.

3 Exercices

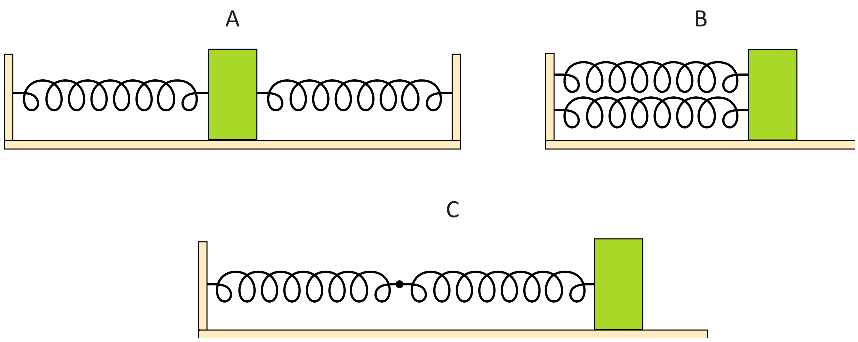
1. Un enfant sur une balançoire met 4 secondes pour effectuer deux oscillations. Calculer la période et la fréquence des oscillations.

2. La figure montre la représentation graphique de l'accélération a_τ d'un corps en fonction de son déplacement s.



a. Expliquer pourquoi le corps effectue des oscillations.
b. Expliquer pourquoi les oscillations ne sont pas harmoniques.

3. Un pendule élastique composé d'un ressort de raideur k et d'un solide de masse m oscille avec la période T. On ajoute à ce pendule un deuxième ressort identique au premier. Dans quels cas la période va-t-elle changer ?

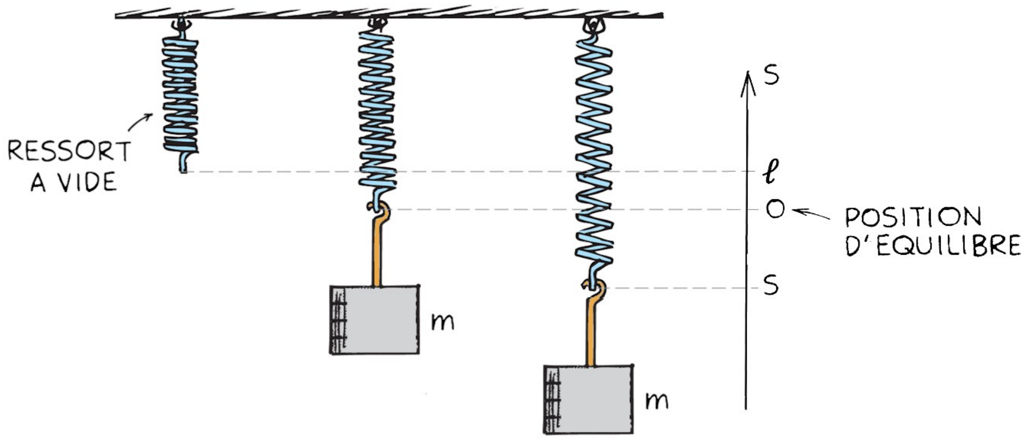


4. La figure illustre un pendule élastique vertical dont la masse du ressort est supposée négligeable.

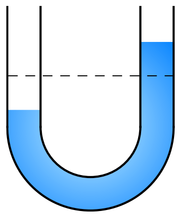
a. Identifier les forces qui agissent sur le corps suspendu au ressort et représenter les forces su la figure.

b. Établir l'équation différentielle du mouvement du pendule vertical.

c. En déduire la période du pendule vertical.



5. Un liquide effectue des oscillations dans un tube en U de section uniforme.



a. Montrer que les oscillations sont harmoniques.

b. Exprimer leur période en fonction de la longueur ℓ de la colonne de liquide.

6. Un ressort de suspension de voiture de raideur k et à spires non jointives est fixé avec une extrémité sur un banc d'essai. Un solide, de masse m, fixé à l'autre extrémité du ressort peut glisser sans frottement sur une tige rigide horizontale $s's$. L'abscisse du centre d'inertie G de S est repérée par rapport à la position O de G au repos. On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche, sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$. Son abscisse est alors $s = s_{\mathrm{m}}$.

a. Représenter schématiquement le système étudié.

b. Faire le bilan des forces appliquées au solide.

c. Déterminer l'équation horaire du mouvement du solide, sachant que $k = 4\ \mathrm{kN/m}$, $m = 100\ \mathrm{kg}$ et $s_{\mathrm{m}} = 5\ \mathrm{cm}$.

d. Calculer la période propre pour les mêmes données numériques.

7. Un pendule élastique, constitué d'un solide de masse $200\ \mathrm{g}$ et d'un ressort de raideur $5\ \mathrm{N/m}$, effectue des oscillations libres sur un banc à coussin d'air horizontal. L'axe des abscisses a la direction du ressort. L'origine des abscisses est la position du centre d'inertie G du solide lorsque celui-ci est au repos. L'origine des dates correspond au passage de G par l'origine des abscisses avec une vitesse de valeur $0{,}60\ \mathrm{m/s}$ dirigée dans le sens négatif de l'axe.

a. Déterminer l'équation horaire qui décrit le mouvement de G.

b. Déterminer la date de son premier passage à l'abscisse $s = 3\ \mathrm{cm}$.

8. Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de raideur $k = 20\ \mathrm{N/m}$ et d'une masse de $200\ \mathrm{g}$. A l'instant $t = 0$, le centre d'inertie est lancé à partir de la position $s = 2\ \mathrm{cm}$ avec la vitesse initiale de $20\ \mathrm{cm/s}$.

a. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.

b. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

9. Un solide de masse m pouvant glisser sans frottement sur un support horizontal est fixé à un ressort de raideur $k = 48\ \mathrm{N/m}$. Son élongation s mesurée à partir de sa position d'équilibre est donnée par $s = s_\mathrm{m} \sin(8\,t - \pi)$. Pour faire osciller la masse m, on lui fournit une énergie de $0{,}24\ \mathrm{J}$. Déterminer :

a. La masse m du solide ;

b. L'amplitude du mouvement ;

c. La vitesse maximale de l'oscillateur ;

d. L'élongation de l'oscillateur pour laquelle l'énergie cinétique est égale à la moitié de l'énergie potentielle ;

e. Les composantes de la vitesse et de l'accélération en ce point.

10. Un objet glisse sans frottement dans un bol à surface sphérique.

a. Montrer que l'objet effectue un mouvement oscillatoire harmonique pour des petits déplacements à partir du point le plus bas. Calculer la valeur du coefficient de proportionnalité C.

b. Calculer la période des oscillations.

11. La longueur d'un pendule simple d'une horloge est choisie de sorte que la période de ses oscillations au Luxembourg soit égale à une seconde. Le pendule fait avancer l'aiguille des secondes de l'horloge. L'intensité de pesanteur au Luxembourg vaut $g_L = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

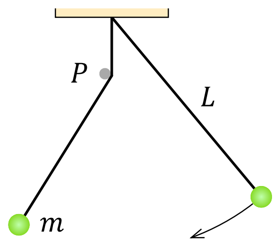
a. Calculer la longueur du pendule.

On emmène le pendule à l'équateur. L'intensité de pesanteur y vaut $g_E = 9{,}78\ \mathrm{m/s^2}$.

b. L'horloge va-t-elle avancer ou retarder à l'équateur ?

c. Comment et de quelle valeur doit-on changer la longueur du pendule pour que l'horloge indique le temps juste ?

12. Un pendule simple composé d'une masse m et d'un fil inextensible de longueur L est lâché sans vitesse initiale. Une tige horizontale se trouve en P à une distance verticale de $L/4$ en dessous du point de fixation du pendule.



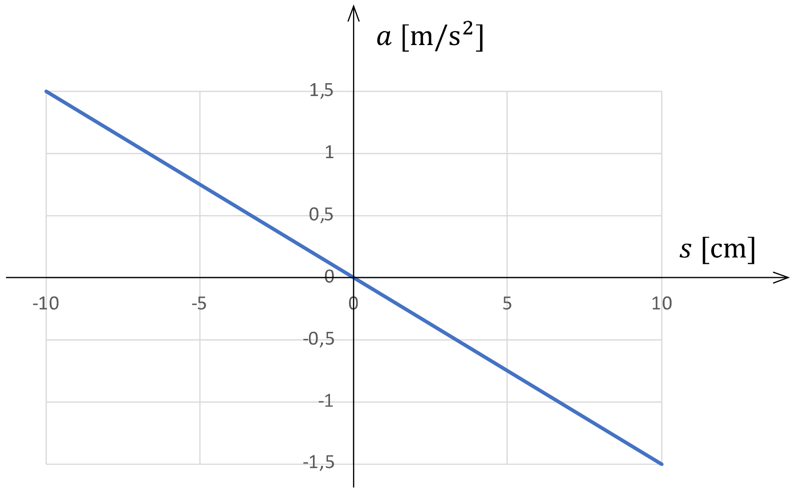
On considère le mouvement entre deux positions successives de vitesse nulle.

a. Comparer les positions verticales initiale et finale de la masse m.

b. Calculer la durée du mouvement.

13. Deux pendules simples ont respectivement les longueurs $36\ \mathrm{cm}$ et $64\ \mathrm{cm}$. On les lâche avec la même abscisse angulaire initiale. Calculer le temps minimal pour que les deux pendules reviennent simultanément en leur position initiale.

14. Le graphique ci-dessous montre l'accélération a d'un objet de masse $m = 0{,}15\ \mathrm{kg}$ en fonction de l'élongation s.



a. Déduire du graphique que l'objet effectue des oscillations harmoniques.

Calculer :

b. la période des oscillations ;

c. la vitesse maximale de l'objet ;

d. l'intensité maximale de la force résultante exercée sur l'objet ;

e. l'énergie mécanique de l'objet.

Crédits Photos

Crédits Illustrations

Des remerciements particuliers sont adressés à Paul G. HEWITT. Les illustrations sont, sauf indication contraire, l'œuvre de Paul G. Hewitt et des auteurs du cours. Les illustrations de Paul G. HEWITT ont été retravaillées par Laurent HILD, avec l'autorisation écrite et personnelle de l'auteur. Les illustrations originales sont des livres :