2.

Mouvement des satellites

NASA/CREW-2/ISS066-E-081311

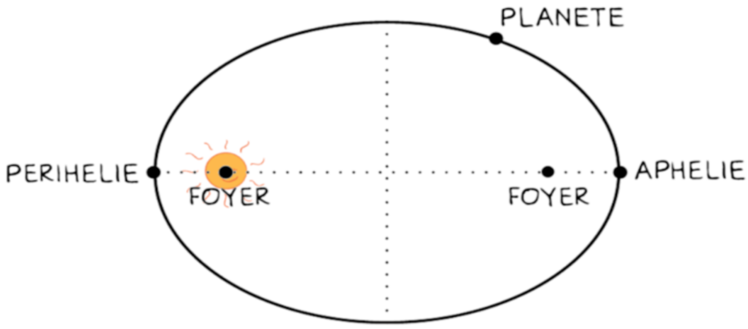
Sommaire

1 Lois de Kepler

Durant près de 20 ans, l'astronome danois Tycho Brahe a pris des mesures astronomiques précises des positions des planètes et les a transmises à l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630). Kepler a réussi à convertir les données expérimentales pour un observateur qui se trouve à l'extérieur du système solaire. Kepler s'attendait à ce que les planètes se déplacent sur des cercles parfaits autour du Soleil. Après près de 10 années d'efforts, il a finalement découvert les lois qui décrivent le mouvement des planètes.

1.1 Première loi de Kepler (loi des orbites)

Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

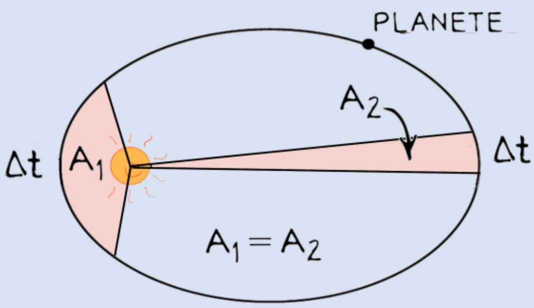


Le point de l'orbite planétaire le plus proche du Soleil est appelé **périhélie**, le point le plus éloigné **aphélie**. La moyenne des distances minimale et maximale correspond exactement au demi-grand axe. Pour la Terre, la distance au périhélie vaut 147,1 millions de kilomètres et à l'aphélie 152,1 millions de km. La distance moyenne Terre-Soleil vaut ainsi 149,6 millions de kilomètres. On l'appelle encore **unité astronomique** (symbole UA) : $1\ \mathrm{UA} = 1{,}496 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$.

1.2 Deuxième loi de Kepler (loi des aires)

Le segment qui joint le centre du Soleil et celui de la planète balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux :

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \cdots = \text{const}$$

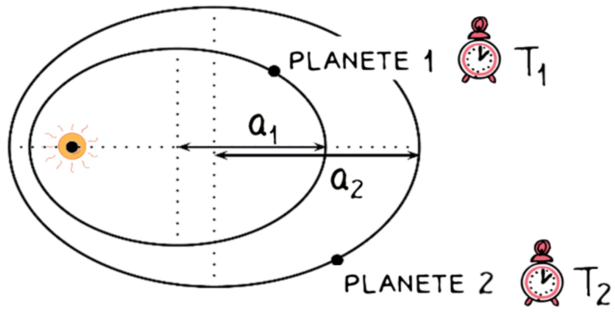


Il en découle que les planètes ne tournent pas à vitesse constante autour du Soleil. Si $\Delta t_1 = \Delta t_2$, alors $A_1 = A_2$. Pendant la même durée, une planète parcourt dès lors une plus grande distance lorsqu'elle est proche du Soleil que lorsqu'elle est loin du Soleil. On en conclut que la vitesse linéaire d'une planète augmente lorsqu'elle s'approche du Soleil et diminue lorsqu'elle s'en éloigne.

1.3 Troisième loi de Kepler (loi des périodes)

Les carrés des périodes de révolution (T) des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes (a) de leurs orbites :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$



La 3^e loi de Kepler est corroborée de façon impressionnante par les huit planètes de notre système solaire :

	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
T (en a)	0,241	0,615	1	1,88	11,9	29,4	84,0	165
a (en UA)	0,387	0,723	1	1,52	5,20	9,54	19,2	30,1
$\frac{T^2}{a^3}$ (en $\frac{\text{a}^2}{\text{UA}^3}$)	1,002	1,001	1	1,006	1,007	0,996	0,997	0,998

Les lois de Kepler ont été énoncées pour notre système solaire. Elles s'appliquent cependant de façon générale à tout corps qui orbite, sous l'influence de la gravitation, autour d'un astre, notamment aux satellites artificiels en orbite autour d'un astre, ou encore aux lunes en orbite autour d'une planète, ou encore aux astéroïdes et aux comètes en orbite autour du Soleil.

Remarque :

Les deux points d'une orbite qui sont situés à une distance extrémale du corps central sont appelés **apsides**, l'apside inférieure correspondant à la distance minimale, l'apside supérieure à la distance maximale. Dans le cas du Soleil, les apsides inférieure et supérieure sont respectivement appelées périhélie et aphélie, dans le cas de la Terre **périgée** et **apogée**.

■ ***As-tu compris ?***

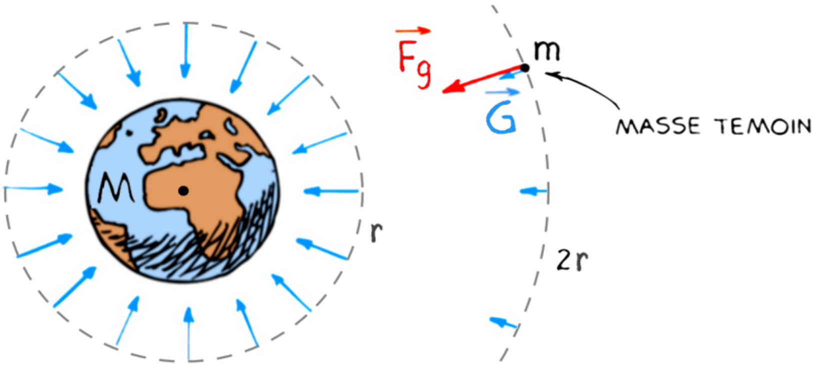
1. Pluton est une planète naine de notre système solaire. Le demi-grand axe de son orbite autour du Soleil vaut 39,5 UA. Calculer sa période de révolution en utilisant le tableau ci-dessus.
2. Un satellite en orbite elliptique autour de la Terre se déplace…
   A. le plus vite quand il est le plus proche de la Terre.
   B. le plus vite quand il est le plus loin de la Terre.
   C. le plus lentement quand il est le plus proche de la Terre.
   D. avec une vitesse uniforme le long de son orbite.

2 Champ et force de gravitation (rappels)

Le **champ de gravitation** créé par un astre à répartition sphérique de masse est radial et centripète. À l'extérieur de l'astre, l'intensité du champ est donnée par :

$$G = K\,\frac{M}{r^2}$$

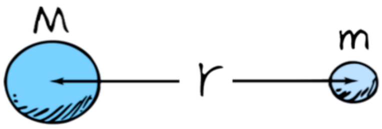
où $K = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ désigne la constante de gravitation universelle, M la masse de l'astre et r la distance par rapport à son centre de masse. Il s'agit d'une **loi en carré inverse**.



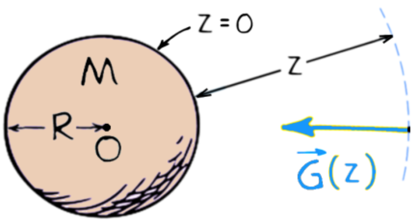
La **force de gravitation** que l'astre de masse M exerce sur une masse sphérique m distante d'une distance r (distance entres les deux centres de masse) s'écrit :

$$F_g = m\,G = K\,\frac{m\,M}{r^2}$$

Il s'agit de la **loi de gravitation de Newton**.



Considérons un astre sphérique de masse M et un point qui se trouve à une altitude z au-dessus de la surface de l'astre :



L'intensité du champ de gravitation créé par l'astre à l'altitude z vaut $G(z) = K\frac{M}{r^2} = K\frac{M}{(R+z)^2}$

À l'altitude $z = 0$, c'est-à-dire à la surface de l'astre, l'intensité du champ gravitationnel s'écrit :

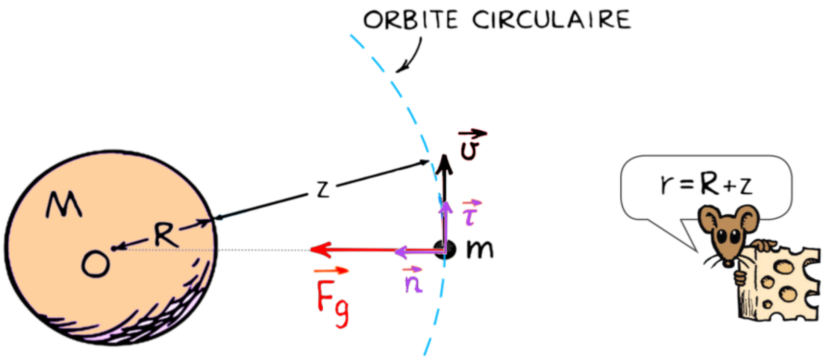
$$G(z=0) = G_0 = K\,\frac{M}{R^2}$$

3 Satellites en orbite circulaire

On distingue entre **satellite artificiel**, qui est un engin lancé par l'homme en orbite autour d'une planète ou d'une lune, et **satellite naturel**, qui est une lune en orbite autour d'une planète. Par analogie, les études du mouvement d'un satellite artificiel ou naturel ou même d'une planète en orbite autour du Soleil peuvent se faire de la même manière. Les demi-grands axes des planètes ne dévient que faiblement (moins de 3% !) de leurs demi-petits axes. Pour faciliter l'étude de leur mouvement, leurs orbites peuvent être approchées par des cercles. Il en est de même pour la Lune qui orbite autour de la Terre et pour beaucoup d'autres satellites qui gravitent autour d'un astre.

3.1 Étude du mouvement

Considérons un satellite de masse m qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ sur une orbite circulaire de rayon r et de centre O autour d'un astre à symétrie sphérique de masse M et de rayon R. L'altitude z du satellite est mesurée par rapport la surface de l'astre.



- Système : satellite de masse m
- Référentiel : astrocentrique, considéré comme galiléen
- On suppose que le satellite évolue dans le vide[1] et qu'il subit uniquement la force de gravitation $\vec{F}_g = m\,\vec{G}$ exercée par le champ gravitationnel de l'astre.

Plan d'orbite

Puisque la force gravitationnelle est une force centrale, le plan d'orbite d'un satellite doit passer par le centre de gravité de l'astre.

Vecteur accélération

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F}_g = m\,\vec{a}$$

$$m\,\vec{G} = m\,\vec{a} \qquad |:m$$

$$\vec{a} = \vec{G}$$

Puisque le champ de gravitation $\vec{G}$ pointe toujours vers le centre de l'orbite circulaire, l'accélération $\vec{a}$ et la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ sont centripètes. Ainsi, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a} = G\,\vec{n} = \frac{K\,M}{r^2}\,\vec{n} \tag{1}$$

[1] Si l'astre est la Terre, le satellite doit avoir une altitude d'au moins 150 km pour ne pas être brûlé à cause du frottement de l'atmosphère.

Vitesse linéaire :

En analysant la composante tangentielle $\vec{a}_\tau$ et la composante normale $\vec{a}_n$ du vecteur accélération séparément, l'expression (1) permet de conclure que[2] :

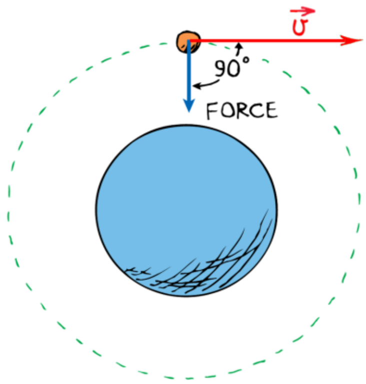
- $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow v = \text{const}$

Le mouvement du satellite est *uniforme*.

En effet, la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ agit à tout instant perpendiculairement au déplacement du satellite et n'effectue donc aucun travail. Selon le TEC :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_g) = 0 \quad \Rightarrow \; E_c = \text{const} \Rightarrow \; v = \text{const}$$

Le satellite tombe tangentiellement à la surface de l'astre à vitesse constante. C'est un cas particulier de la chute libre.



- $a_n = \frac{K\,M}{r^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{K\,M}{r^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{K\,M}{r}}$ (2)

La vitesse du satellite est indépendante de sa masse et diminue lorsque r augmente.

Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{K\,M}{r^3}}$$

Période de révolution :

Puisque $T = \frac{2\pi}{\omega}$, il vient :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{K\,M}} \tag{3}$$

3^e loi de Kepler :

En élevant l'expression (3) au carré, on obtient la troisième loi de Kepler pour les orbites circulaires :

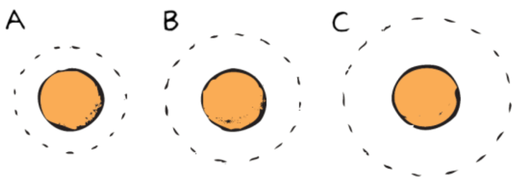
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K\,M}\,r^3 \;\Rightarrow\; \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM} = \text{constant} \;\Rightarrow\; T^2 \sim r^3 \tag{4}$$

Les mesures de la période de révolution T et du rayon orbital r d'un satellite de l'astre permettent ainsi de calculer la masse M de l'astre.

As-tu compris ?

3. Les lignes en tirets montrent trois orbites circulaires de satellites terrestres. Classer les grandeurs suivantes par ordre décroissant :

- **a.** la vitesse linéaire
- **b.** la période de révolution



4. La Lune tourne autour de la Terre avec une période de 27,3 jours sur une orbite dont le rayon moyen vaut 385000 km. Calculer la masse de la Terre.

---

[2] Le satellite se déplaçant toujours dans le sens positif de la trajectoire, on a que $v_\tau = v$ et $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Exercice résolu

La Station spatiale internationale (ISS : *Internationale space station*) est une station spatiale habitée placée en orbite basse terrestre à une altitude d'environ 400 km. C'est le plus grand satellite artificiel de la Terre. Elle sert de laboratoire de recherche scientifique et est occupée en permanence depuis 2000 par des astronautes. Calculer sa vitesse linéaire et sa période de révolution.

Solution :

Vitesse linéaire : $v = \sqrt{\frac{K\,M}{r}} = \sqrt{\frac{K\,M}{R+z}}$

A.N. : $v = \sqrt{\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370+400) \cdot 10^3}} = 7677\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}677\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

Période de révolution : $T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = \frac{2\,\pi\,(R+z)}{v}$

A.N. : $T = \frac{2\,\pi\,(6370+400) \cdot 10^3}{7677} = 5541\ \mathrm{s} = 92\ \mathrm{min}\ 21\ \mathrm{s}$

La période de révolution de L'ISS vaut environ 90 minutes. Ses occupants se trouvent en permanence en chute libre. L'accélération centripète vers la Terre est légèrement inférieure à g à cause de l'altitude. Cette accélération n'est cependant pas ressentie par les astronautes.

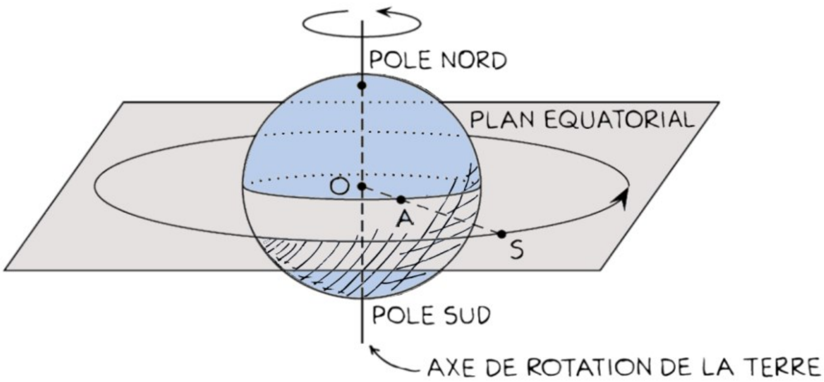
3.2 Satellite géostationnaire

Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui paraît immobile pour un observateur sur la Terre.

Les satellites géostationnaires ont révolutionné la télécommunication. Grâce à leur immobilité apparente, ils peuvent facilement être visés par des antennes paraboliques depuis la surface terrestre et ainsi relayer des signaux de télécommunication entre différents endroits de la Terre.

Plan d'orbite

Pour qu'un satellite S, tournant dans le sens de rotation de la Terre, reste toujours à la verticale du même point A de la surface terrestre, le plan d'orbite, passant comme pour tous les satellites par le centre de gravité de l'astre attirant, doit de plus être perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre. Ainsi le satellite géostationnaire doit évoluer dans le **plan de l'équateur terrestre**.



Période de révolution

La période de révolution d'un satellite géostationnaire doit être égale à la période de rotation de la Terre, c'est à-dire un **jour sidéral** (voir section 7.2) :

$$T = 1 \text{ jour sidéral} = 86164 \text{ s} = 23\text{h } 56\text{min } 4\text{s}$$

Altitude d'un satellite géostationnaire

Sachant que la période de révolution T du satellite est égale à la période de rotation de la Terre, son altitude z peut être déduite de l'équation (4) :

$$r^3 = \frac{K\,M\,T^2}{4\,\pi^2}$$

$$(R+z)^3 = \frac{K\,M\,T^2}{4\,\pi^2}$$

$$R+z = \left(\frac{K\,M\,T^2}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = \left(\frac{K\,M\,T^2}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$$

A.N. : $z = \left(\frac{6{,}673^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 86164^2}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 6{,}370 \cdot 10^6 = 3{,}581 \cdot 10^7 \text{ m} = 35810 \text{ km}$

Vitesse linéaire

$$v = \sqrt{\frac{K\,M}{R+z}}$$

A.N. : $v = \sqrt{\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3 + 3{,}58 \cdot 10^7}} = 3{,}08 \cdot 10^3 \,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 3\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

Vitesse angulaire

$$\omega = \frac{v}{R+z}$$

A.N. : $\omega = \frac{3{,}08 \cdot 10^3}{6370 \cdot 10^3 + 3{,}58 \cdot 10^7} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Comme les satellites géostationnaires ont tous la même vitesse angulaire et le même sens de révolution, ils n'entrent pas en collision.

■ *As-tu compris ?*

5. Un satellite géostationnaire peut se trouver à la verticale au-dessus de Singapore, mais pas au-dessus de Luxembourg. Pourquoi ?

4 Énergie potentielle gravitationnelle

4.1 Rappel

Puisque la force de gravitation est une *force conservative*[3], on peut lui attribuer une énergie potentielle E_p selon la prescription :

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}(\vec{F}_g)$$

où $W_{AB}(\vec{F}_g)$ désigne le travail effectué par la force de gravitation lorsque son point d'application se déplace du point A au point B.

L'**énergie potentielle de gravitation** du système composé de la masse source et de la masse témoin est l'énergie qu'il possède du fait de la position de la masse témoin dans le champ de gravitation de la masse source.

4.2 Expression de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ radial)

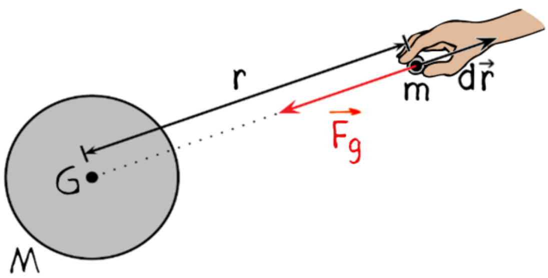
Le champ de gravitation d'une masse source sphérique est radial et diminue selon l'inverse du carré de la distance. La force de gravitation qu'un corps subit n'est donc pas constante lors d'un déplacement radial. On ne peut donc pas utiliser la formule $W_{AB}(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ telle quel pour calculer le travail de la force de gravitation. Cependant, on peut rendre le déplacement tellement petit que la force peut être supposée constante sur ce déplacement.

Le travail effectué par la force de gravitation $\vec{F}_g$ lors d'un **déplacement infinitésimal** $\mathrm{d}\vec{r}$ s'appelle **travail élémentaire** et s'écrit :

$$\mathrm{d}W(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

La **variation infinitésimale** $\mathrm{d}E_p$ de l'énergie potentielle de gravitation pour un déplacement infinitésimale peut donc s'écrire :

$$\mathrm{d}E_p = -\mathrm{d}W(\vec{F}_g) = -\vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



La force de gravitation étant une **force centrale**, son intensité dépend seulement de la distance entre les corps en interaction. Il suffit dès lors de se limiter au cas où la distance varie sur un parcours radial. L'énergie potentielle augmente lorsque la distance entre les corps *augmente*.

$\vec{F}_g$ et $\mathrm{d}\vec{r}$ sont alors de sens opposé et on obtient :

$$\mathrm{d}E_p = F_g\,\mathrm{d}r \Leftrightarrow F_g = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

[3] Une force est dite conservative lorsque le travail qu'elle effectue est indépendant du chemin suivi.

La force de gravitation est la *dérivée de l'énergie potentielle* de gravitation par rapport à la distance.

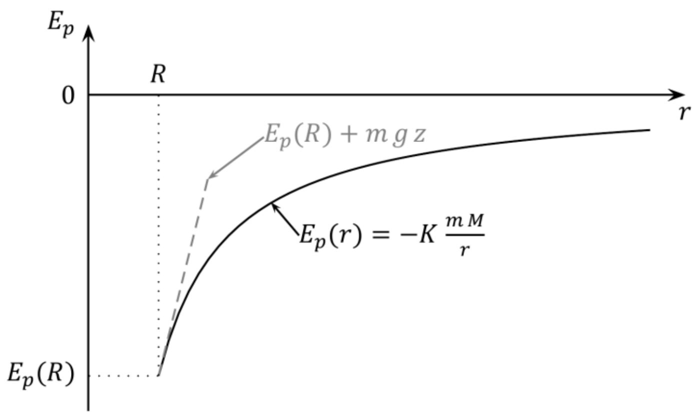
Trouver l'expression de l'énergie potentielle de gravitation revient mathématiquement à rechercher une fonction $E_p(r)$ qui est telle que sa dérivée donne l'expression de la force de gravitation. Ainsi :

$$E_p(r) = -K\,\frac{m\,M}{r} + \mathrm{const}$$

On convient que la position de référence pour le calcul de l'énergie potentielle se situe *à l'infini* puisque la force de gravitation tend vers 0 lorsque la distance entre les masses en interaction tend vers l'infini. Il faut donc que la constante soit nulle et il vient :

$$E_p(r) = -K\,\frac{m\,M}{r} \tag{5}$$

Pour r donné, l'énergie potentielle de gravitation est constante, ce qui est confirmé par la sphéricité des surfaces équipotentielles[4].



Énergie potentielle de gravitation d'un corps de masse m en fonction de sa distance r au centre de gravité du corps céleste de masse M et de rayon R. Pour une petite altitude $z = r - R$, l'énergie potentielle augmente approximativement linéairement.

Les surfaces équipotentielles (en orange) sont des sphères concentriques centrés sur le centre de gravité du corps céleste.

As-tu compris ?

6. Considérons un satellite artificiel de masse $m = 600\ \mathrm{kg}$.

a. Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle du système Terre-satellite lorsque le satellite se trouve à la surface de la Terre.

b. Lorsque le satellite se trouve en orbite circulaire autour de la Terre, l'énergie potentielle gravitationnelle du système Terre-satellite…

A. augmente

B. diminue

C. reste identique

c. Représenter l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite en fonction du rayon de l'orbite du satellite pour $R_T < r < 6\,R_T$.

[4] À noter que l'expression (5) est seulement valable à l'extérieur de l'astre, c.-à-d. si r est supérieur au rayon R de l'astre.

5 Satellites et conservation d'énergie

Considérons un satellite de masse m en mouvement autour d'un astre de masse M, où $M \gg m$. L'énergie cinétique du satellite s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

où v désigne la vitesse du satellite dans le **référentiel astrocentrique**, considéré comme galiléen : géocentrique pour les satellites terrestres et héliocentrique pour les planètes. L'astre étant immobile dans ce référentiel, c'est aussi l'énergie cinétique du système astre-satellite[5].

L'énergie potentielle gravitationnelle du système astre-satellite s'écrit :

$$E_p = -K\, \frac{m\, M}{r} \tag{6}$$

où K désigne la constante de gravitation universelle et r la distance entre les centres de masse du satellite et de l'astre.

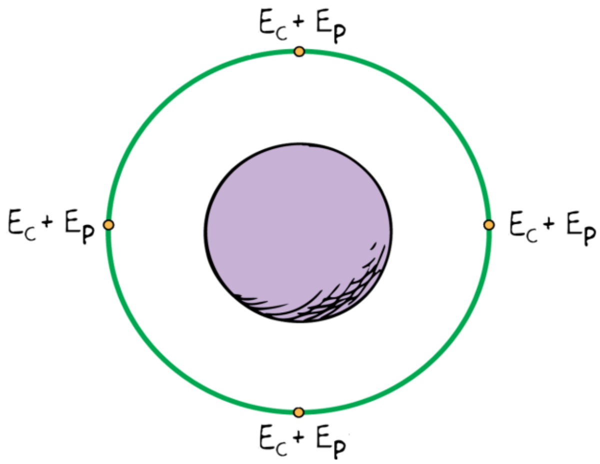
L'**énergie mécanique** du système astre-satellite est alors donnée par :

$$E_{méc} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - K\, \frac{m\, M}{r} = \text{const} \tag{7}$$

Puisque le système est isolé et évolue sans frottements dans le vide interstellaire, son énergie mécanique reste *constante* au cours du temps.

Cas particulier de l'orbite circulaire

$$\begin{aligned} E_{méc} &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}\, m\, v^2 - K\, \frac{m\, M}{r} \\ &= \frac{1}{2}\, m \left(\frac{K\, M}{r}\right) - K\, \frac{m\, M}{r} \\ &= -\frac{1}{2}\, K\, \frac{m\, M}{r} \end{aligned}$$



Dans le cas d'une orbite circulaire, les énergies potentielle et mécanique sont constantes, puisque le rayon d'orbite r est constant. Il faut donc que l'énergie cinétique soit aussi invariable. Cela signifie que le mouvement du satellite en orbite circulaire est *uniforme*.

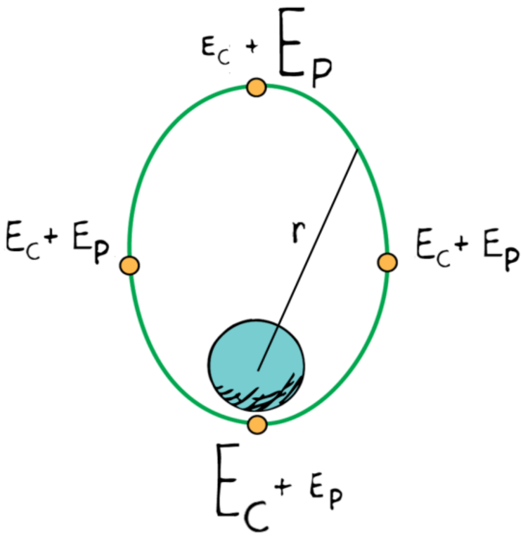
L'énergie mécanique est négative, ce qui est typique pour un *système lié*. Cela est dû à notre choix arbitraire du niveau de référence de l'énergie potentielle, à savoir $E_p(r \to \infty) = 0$. Ce choix est judicieux car le bon sens nous suggère d'attribuer à un satellite libéré et au repos une énergie mécanique nulle.

---

[5] Pour le voir, on peut considérer un objet de masse m qui tombe en chute libre vers la Terre de masse M_T. En vertu du principe de l'action et de la réaction, l'objet va aussi attirer la Terre et l'accélérer à une vitesse v_T. Par le principe de la conservation de la quantité de mouvement, on a à tout moment $m\, v = M_T\, v_T$. L'énergie cinétique acquise par la Terre sera $E_c' = \frac{1}{2}\, M_T\, v_T^2 = \frac{1}{2}\, M_T \left(\frac{m\, v}{M_T}\right)^2 = \frac{m}{M_T} E_c \ll E_c$, donc négligeable.

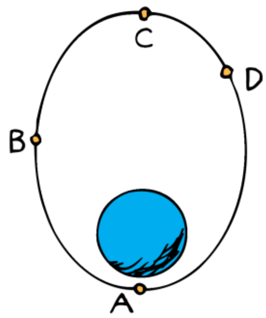
Cas de l'orbite elliptique

D'après la relation (6), l'énergie potentielle est la plus grande lorsque le satellite est le plus éloigné de l'astre et la plus petite lorsque le satellite en est le plus proche. Puisque l'énergie mécanique possède la même valeur en tout point de l'orbite, l'énergie cinétique est la plus petite lorsque l'énergie potentielle gravitationnelle est la plus grande et vice-versa. On en conclut que la vitesse du satellite est maximale lorsqu'il est le plus proche de l'astre est minimale lorsqu'il en est le plus éloigné. Cette conclusion est en accord avec la deuxième loi de Kepler.



■ *As-tu compris ?*

7. La figure montre l'orbite elliptique d'un satellite autour d'un astre. En quelle(s) position(s)



- **a.** le satellite a-t-il la plus grande vitesse linéaire ?
- **b.** le satellite a-t-il la plus petite vitesse linéaire ?
- **c.** le satellite a-t-il la plus grande énergie cinétique ?
- **d.** le système astre-satellite a-t-il la plus grande énergie potentielle gravitationnelle ?
- **e.** le système astre-satellite a-t-il la plus grande énergie mécanique ?
- **f.** le satellite subit-il la plus grande force gravitationnelle ?
- **g.** subit-il la plus grande accélération ?

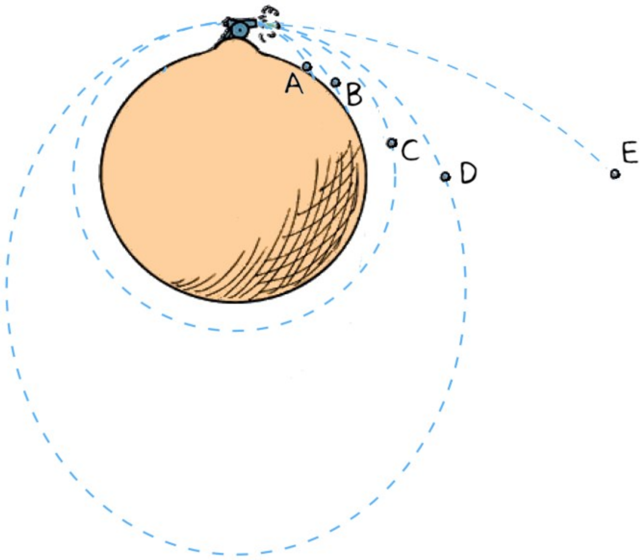
8. Mêmes questions dans le cas d'une orbite circulaire

6 Satellisation

Si on lâche une pierre sans vitesse initiale, elle tombe verticalement. Si on lance la pierre horizontalement, elle retombe plus loin, en suivant une trajectoire parabolique. Et si on lançait la pierre avec une vitesse si grande que la courbure de la trajectoire corresponde à celle de la Terre ?

6.1 Expérience de pensée du canon de Newton

Newton a imaginé un boulet lancé à différentes vitesses par un canon horizontal, en ignorant toute résistance de l'air ou en supposant que le canon est situé tellement haut que la friction de l'atmosphère ne joue plus de rôle. Newton a raisonné que le boulet pourrait éternellement tomber autour de la Terre s'il avait une vitesse horizontale suffisante. La mise en orbite d'un satellite artificiel atour d'un astre est appelée **satellisation**.



- Si la vitesse du boulet est faible, il retombera sur la Terre (A).
- Si la vitesse augmente, le boulet ira plus loin (B).
- Si la vitesse est suffisante, il tombera autour de la Terre sur une trajectoire fermée (C, D).
- Si la vitesse devient excessivement grande, le boulet s'échappera de la Terre (E).

6.2 Vitesse de satellisation et vitesse de libération

Pour toute altitude z, il existe une et une seule vitesse spécifique qui produit une orbite circulaire. C'est la **vitesse de satellisation circulaire v_c**.

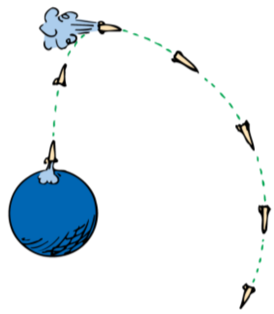
D'après la relation (2) :

$$v_c = \sqrt{\frac{K\,M}{R+z}}$$

Afin d'avoir un ordre de grandeur pour les vitesses de satellisation, on considère souvent la vitesse de satellisation nécessaire pour une orbite circulaire d'altitude $z = 0$, bien que cette orbite soit impossible à réaliser en pratique. Cette vitesse est appelée **vitesse de satellisation minimale**.

Pour un satellite à la surface terrestre :

A.N. : $v_c = \sqrt{\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 7{,}91 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}91 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$



Comme de telles vitesses étaient inconcevables à l'époque de Newton, il n'était pas optimiste que les hommes pourraient un jour lancer des satellites. À cette vitesse, la résistance de l'atmosphère brûlerait tout satellite. Voilà pourquoi un satellite doit rester au moins 150 km au-dessus de la surface de la Terre. Pour lancer un satellite autour de la Terre, sa fusée est d'abord propulsée verticalement. Une fois au-dessus de l'atmosphère, la fusée est orientée tangentiellement à la surface de la Terre et une dernière poussée l'accélère jusqu'à sa vitesse d'orbite.

La vitesse minimale nécessaire pour qu'un corps puisse s'échapper de l'influence gravitationnelle d'un astre est appelée **vitesse de libération** et notée v_ℓ.

Son expression peut être déduite en appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un point situé à la surface de l'astre ($r = R$), où $v = v_\ell$, et un point situé à l'infini ($r \to \infty$), où $v = 0$. Dans (7) :

$$\frac{1}{2}\, m\, v_\ell^2 - K\, \frac{m\, M}{R} = 0 \Longrightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2\, K\, M}{R}}$$

Pour la Terre :

A.N. : $v_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 1{,}12 \cdot 10^4 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 11{,}2 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

La vitesse de libération pour le Soleil est de 620 km/s à la surface du Soleil. Même à une distance de 150 millions de km du Soleil (égale à celle de l'orbite terrestre), la vitesse de libération du Soleil est de 42,1 km/s. Un objet projeté de la Terre à une vitesse supérieure à 11,2 km/s mais inférieure à 42,1 km/s serait libéré de l'attraction terrestre mais pas de celle du Soleil. Plutôt que de partir à jamais du système solaire, il occuperait une orbite autour du Soleil. Dans l'annexe 7.3 se trouvent les vitesses de libération d'autres corps célestes de notre système solaire.

As-tu compris ?

9. Une station spatiale se trouve en orbite circulaire à une vitesse de 7 km/s par rapport à la Terre. Supposons que la station propulse une capsule vers l'arrière avec une vitesse de 7 km/s par rapport à la station.

a. Décris la trajectoire de la capsule par rapport à la Terre.

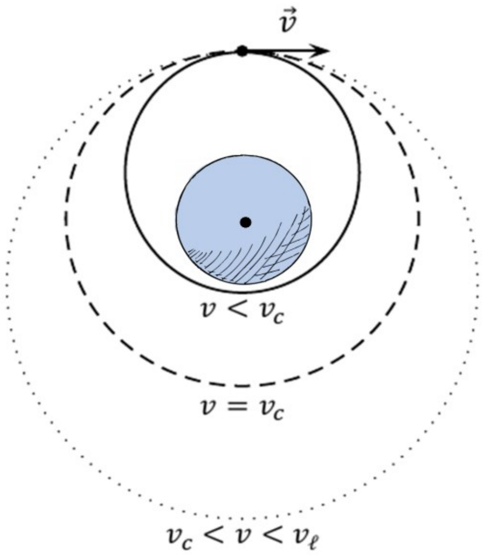
b. Si la capsule était projetée avec une vitesse de 14 km/s, pourquoi serait-elle un danger pour la station spatiale ?

10. Un astronaute effectuant des réparations à l'extérieur de la station spatiale ISS lâche par mégarde sa boîte à outils. Pourquoi les outils ne s'écraseront pas sur la Terre ?

6.3 Formes des trajectoires

Soit v_c la vitesse de satellisation circulaire et v_ℓ la vitesse de libération. Selon la valeur de la vitesse de satellisation $\vec{v}$, supposée orthogonale au segment qui joint le point de lancement du satellite au centre de la Terre, on peut distinguer trois cas :

- $v < v_c$: l'orbite est elliptique ; le centre de la Terre constitue le foyer de l'ellipse le plus éloigné du point de lancement. Si l'altitude du point de lancement n'est pas suffisante, la trajectoire est interrompue par la Terre.
- $v = v_c$: l'orbite est circulaire
- $v_c < v < v_\ell$: l'orbite est elliptique; le centre de la Terre constitue le foyer de l'ellipse le plus proche du point de lancement.

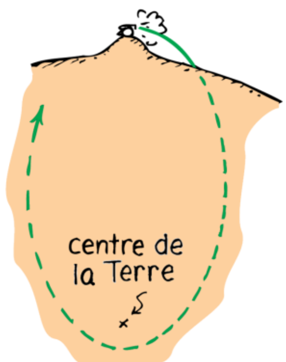


Les vitesses de lancement supérieures ou égales à la vitesse de libération produisent des trajectoires ouvertes utilisées pour les sondes spatiales, engins destinés à explorer l'espace. Deux cas peuvent se présenter:

- $v = v_\ell$: la trajectoire est parabolique ; la vitesse de la sonde tendra vers nulle à l'infini ;
- $v > v_\ell$: la trajectoire est hyperbolique ; la vitesse de la sonde tendra vers une valeur non nulle à l'infini.

Remarque :

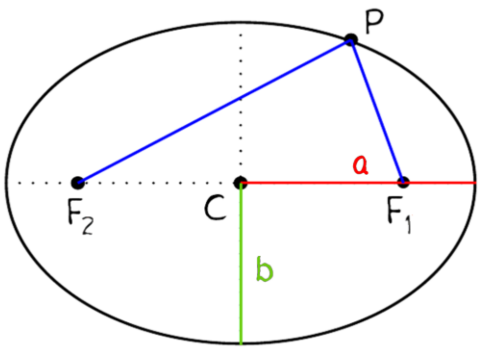
La trajectoire d'un projectile lancé dans le champ de pesanteur est une partie miniscule d'une ellipse étendue dont le foyer le plus éloigné du point de lancement coïncide avec le centre de la Terre (voir figure ci-contre). Si l'espace considéré pour l'étude n'a qu'un volume de quelques km^3, on peut supposer que le champ est uniforme. On trouve alors que la trajectoire est un arc de parabole qui ne se distingue guère de la vraie trajectoire elliptique (voir cours de 2e).



7 Pour en savoir plus

7.1 Définition de l'ellipse

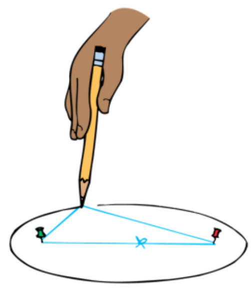
L'ellipse E est l'ensemble des points P dont la somme de leurs distances à deux points fixes F_1 et F_2, appelés **foyers**, est constante.



$$E = \{P \mid PF_1 + PF_2 = \text{const} = 2a\}$$

La distance a désigne le **demi-grand axe** de l'ellipse, le **demi-petit axe** étant noté b. Le centre C de l'ellipse se trouve à l'intersection des petit et grand axes.

On peut construire une ellipse en glissant un crayon le long d'une corde tendue dont les extrémités sont nouées aux foyers (méthode du jardinier). Lorsqu'on diminue la distance entre les foyers, l'ellipse ressemble de plus en plus à un cercle. En effet, le cercle est un cas particulier de l'ellipse où les deux foyers coïncident avec le centre du cercle et où le demi-grand axe et le demi-petit axe s'identifient au rayon du cercle.



7.2 La période de rotation de la Terre

La rotation de la Terre autour de son axe peut aisément être constatée en analysant le mouvement apparent du Soleil au long d'une journée. La durée entre deux passages consécutifs du Soleil par son point le plus haut est appelée un jour, plus précisément un **jour solaire**, et vaut 24 heures.

Pour déterminer la période de rotation de la Terre, il faut cependant considérer la rotation de la Terre par rapport aux étoiles lointaines supposées fixes et non par rapport au Soleil. La période de rotation de la Terre est égale à un **jour sidéral** qui désigne la durée entre deux passages consécutifs d'une étoile fixe par son point le plus haut.

Chaque quatrième année étant – à quelques exceptions près[6] – une année bissextile, une année a en moyenne $(3 \cdot 365 + 366)/4 = 365{,}25$ jours.

Par rapport au Soleil, la Terre effectue ainsi en une année 365,25 tours autour de son axe. D'où :

1 an = 365,25 jours (solaires)

Par rapport à une étoile fixe, la Terre effectue en une année un tour de plus dû au fait que la Terre tourne autour du Soleil. D'où :

1 an = 366,25 jours sidéraux

Par conséquent :

$$1 \text{ jour sidéral} = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot 1 \text{ jour solaire} = 0{,}9973 \cdot 24 \text{ h} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86164 \text{ s}$$

Dû à la révolution de la Terre autour du Soleil, un jour sidéral est d'environ 4 minutes plus court qu'un jour solaire.

7.3 Tableau de vitesses de libération

Table **Escape Speeds at the Surface of Bodies in the Solar System**

Astronomical Body	Mass (Earth masses)	Radius (Earth radii)	Escape Speed (km/s)
Sun	333,000	109	620
Sun (at a distance of Earth's orbit)	333,000	23,500	42.2
Jupiter	318	11	60.2
Saturn	95.2	9.2	36.0
Neptune	17.3	3.47	24.9
Uranus	14.5	3.7	22.3
Earth	1.00	1.00	11.2
Venus	0.82	0.95	10.4
Mars	0.11	0.53	5.0
Mercury	0.055	0.38	4.3
Moon	0.0123	0.28	2.4

[6] Une année est bissextile si elle est divisible par 4 sans être divisible par 100 ou si elle est divisible par 400. Exemples : 1904 et 2000 sont des années bissextiles, 1900 et 2022 ne le sont pas.

8 Exercices

1. Lorsqu'un satellite se déplace avec une vitesse linéaire constante, alors son orbite est…
   A. circulaire.
   B. elliptique.
   C. de l'une quelconque des formes précédentes.

2. Quelles planètes ont une période de révolution plus petite qu'une « année terrestre ». Pourquoi ?

3. La Terre est plus proche du Soleil en décembre qu'en juin. Lors duquel de ces deux mois la Terre se déplace-t-elle plus vite par rapport au Soleil ?

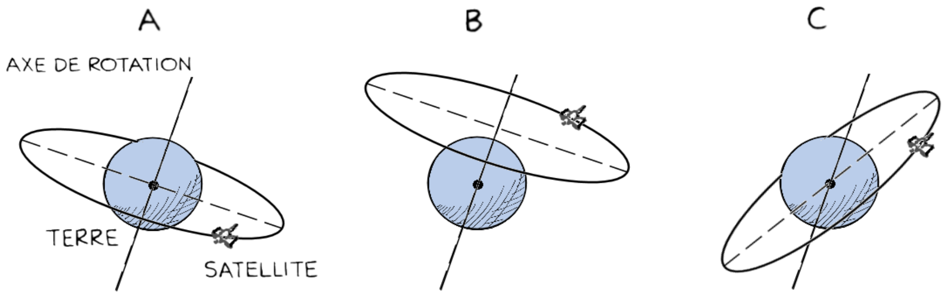
4. Un objet en mouvement circulaire uniforme subit une force centripète. Qui exerce cette force pour un satellite qui tourne autour de la Terre ?

5. De quelles grandeurs la vitesse d'un satellite terrestre ne dépend-elle pas ?
   A. la masse du satellite
   B. la masse de la Terre
   C. la distance entre les centres de masse du satellite et de la Terre.

6. La planète Mars a une masse d'environ 1/9$^{\text{ème}}$ de la masse de la Terre. Si Mars était positionné sur la même orbite que la Terre, sa période de révolution autour du Soleil serait...
   A. plus petite que celle de la Terre.
   B. plus grande que celle de la Terre.
   C. identique à celle de la Terre.

7. Lorsqu'un boulet de canon est tiré du haut d'une montagne, la force gravitationnelle change la vitesse du boulet tout au long de sa trajectoire. Cependant, la force gravitationnelle ne change pas la vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre. Pourquoi ?

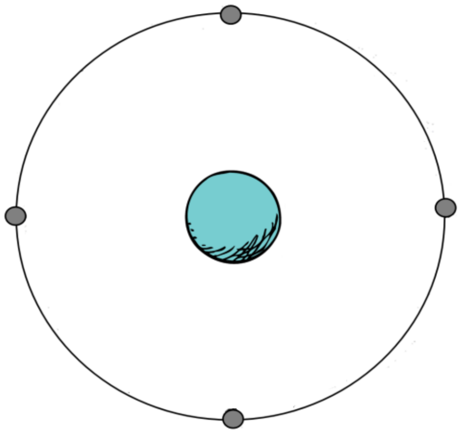
8. On propose trois trajectoires hypothétiques de satellite en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre.



   a. Montrer que, seule, l'une de ces trajectoires est incompatible avec les lois de la mécanique.
   b. Quelle est la seule trajectoire qui peut correspondre à un satellite géostationnaire ? Justifier.

9. L'énergie mécanique du système Terre-satellite est conservée lorsque le satellite...
   A. se trouve en orbite circulaire.
   B. se trouve en orbite elliptique.
   C. se trouve en l'une quelconque des orbites précédentes

10. La figure ci-dessous montre un satellite en orbite circulaire autour de la Terre.



a. Représenter (de façon qualitative) la force gravitationnelle exercée sur le satellite en chacune des quatre positions.

b. Les quatre vecteurs ont-ils même norme ? Justifier.

c. Est-ce que la force de gravitation effectue un travail sur le satellite ? Justifier.

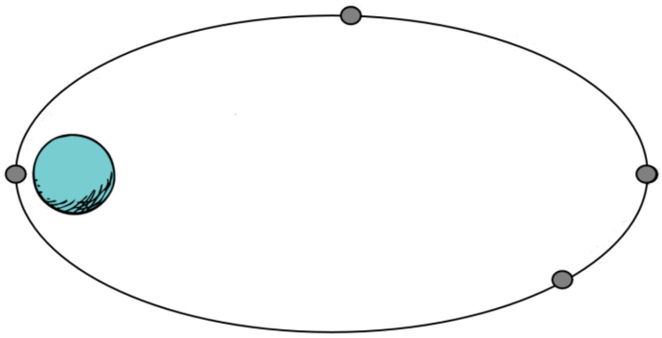
d. Est-ce que l'énergie cinétique du satellite varie au cours du mouvement ? Justifier.

e. Représenter (de façon qualitative) le vecteur vitesse du satellite en chacune des quatre positions.

f. Est-ce que l'énergie potentielle gravitationnelle du système Terre-satellite varie le long de l'orbite ? Justifier.

g. Même question pour l'énergie mécanique du système Terre-satellite.

11. La figure ci-dessous montre un satellite en orbite elliptique.



a. Représenter (de façon qualitative) la force de gravitation exercée sur le satellite en chacune des quatre positions.

b. Les quatre vecteurs ont-ils même norme ? Justifier.

c. Existe-t-il des positions où la force de gravitation effectue un travail sur le satellite ? Expliquer.

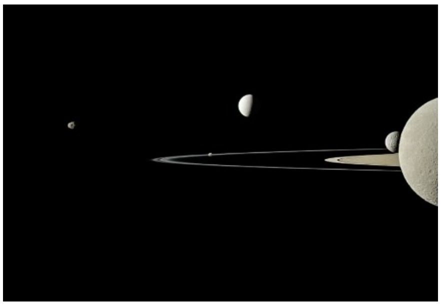
d. Comment l'énergie cinétique du satellite évolue-t-elle dans ces cas ? Justifier.

e. Représenter (de façon qualitative) le vecteur vitesse du satellite en chacune des quatre positions.

f. Que peut-on dire sur la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle tout au long de l'orbite ? Justifier.

12. La planète Saturne est entourée de nombreux anneaux et satellites. Voici quelques données relatives à cette planète et à ses satellites :

Satellites	Période de révolution	r (milliers de km)
Saturne	29 a 167 j	1427 000
Janus	16 h 40 min	151,5
Mimas	22 h 37 min	185,8
Encelade	1 d 8 h 53 min	238,3
Téthys	1 d 21 h 18 min	294,9
Dioné	2 d 17 h 41 min	377,9



Courtesy NASA/JPL-Caltech.

Les anneaux sont formés de divers éléments (cailloux, poussières et blocs de glace) non regroupés entre eux et tournant autour de Saturne. On considère que les astres sont ponctuels, que les trajectoires sont circulaires et que le mouvement est uniforme.

a. Pour étudier le mouvement des satellites de Saturne, il convient de se placer dans un référentiel particulier que l'on peut appeler « saturnocentrique » par analogie à « géocentrique ». Comment définir le référentiel « saturnocentrique » ?

b. Déterminer la masse de Saturne en utilisant les données relatives à l'un des satellites.

c. On néglige l'action des éléments les uns sur les autres devant l'action de l'astre sur chacun des éléments. A et B étant deux éléments de deux anneaux différents initialement alignés avec le centre de Saturne, cet alignement sera-t-il conservé ? Justifier la réponse.

13. Pour mieux contrôler des missions martiennes, on aimerait placer un satellite de télécommunication en orbite circulaire autour de Mars dont quelques caractéristiques sont données dans le tableau ci-contre. On voudrait que ce satellite soit « marsostationnaire », par analogie à « géostationnaire ».

Planéte Mars	
Masse	$6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg
Période de révolution	687 jours
Période de rotation	24,62 heures
Rayon équatorial	3398 km

a. Comment pourrait-on définir un satellite « marsostationnaire » ?

b. Déterminer l'altitude et la vitesse linéaire auxquelles devrait évoluer un tel satellite.

14. Calculer la vitesse d'impact minimale d'une météorite sur la Lune ($R_L = 1\,740$ km; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg).

15. Un projectile est lancé verticalement vers le haut à partir du pôle Nord avec une vitesse initiale de 7,0 km/s, vitesse inférieure à la vitesse de libération de 11,2 km/s. Calculer la hauteur maximale atteinte par le projectile. On négligera la résistance de l'air atmosphérique.

16. Un satellite de masse 500 kg orbite la Terre sur une orbite circulaire de rayon 1000 km. Calculer l'énergie nécessaire pour augmenter le rayon de 100 km.

Crédits Photos

© NASA/CREW-2/ISS066-E-081311 (8 Nov. 2021) – **page titre** (domaine public)

© NASA / S120-E-008531 (5 Nov. 2007) – **p.6** (domaine public)

© Courtesy NASA/JPL-Caltech. – **p. 19**

Crédits Illustrations

Des remerciements particuliers sont adressés à Paul G. HEWITT. Les illustrations sont, sauf indication contraire, l'œuvre de Paul G. Hewitt et des auteurs du cours. Les illustrations de Paul G. HEWITT ont été retravaillées par Laurent HILD, avec l'autorisation écrite et personnelle de l'auteur. Les illustrations originales sont des livres :

© HEWITT, Paul G., *Conceptual physics*, 2015, Pearson

© HEWITT, Paul G., SUCHOCKI John, *Conceptual physical science – Practice Book*, 2012, Pearson

© EPSTEIN Lewis C., HEWITT, Paul G., *Thinking Physics* – 1981, Insight Press