1.

Mouvement circulaire uniforme
Mouvement curviligne

© *Wolfilser* Shutterstock.com

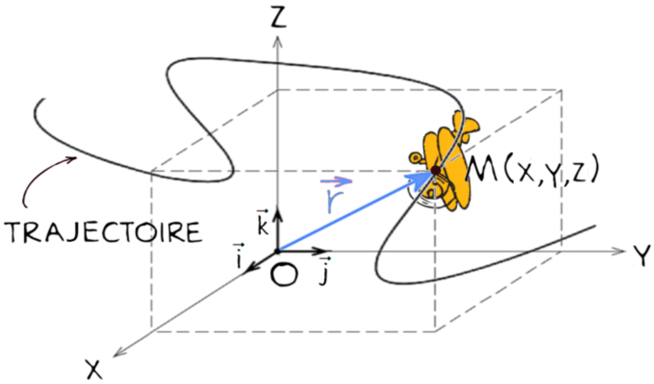
Sommaire

1 Grandeurs cinématiques

1.1 Vecteur position

Le **vecteur position $\vec{r}$** d'un mobile relie l'origine O d'un repère à la position M du mobile[1].

Il faut trois coordonnées pour repérer un mobile dans l'espace. Dans le repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, elles sont notées x, y et z.



Le vecteur position est donné par :

$$\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \text{ respectivement } \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{r}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$$

Sa norme s'écrit :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les coordonnées dépendent en général du temps : $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$. Les relations exprimant x, y et z en fonction du temps sont appelées les **équations horaires** ou **équations paramétriques** de la position du mobile.

1.2 Vecteur vitesse instantanée

Le **vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$** est égal à la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

L'unité SI de vitesse est le mètre par seconde ($\mathrm{m/s}$).

D'après la définition du vecteur vitesse instantanée :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{k} \\ &= v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + v_z\,\vec{k} \end{aligned}$$

[1] Tant qu'on ne s'intéresse qu'au mouvement du mobile dans son ensemble, ignorant ses mouvements propres (p.ex. rotation autour d'un de ses axes), on peut assimiler le mobile à un point mobile M qui représente le centre de masse du mobile, affecté de la masse totale du mobile.

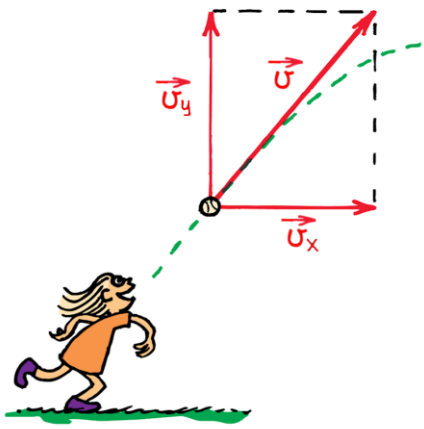
On écrit encore :

$$\vec{v}\left|\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} \\ v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z} \end{aligned}\right.$$

Norme du vecteur vitesse instantanée :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Figure pour un mouvement s'effectuant dans le plan xOy :



1.3 Vecteur accélération instantanée

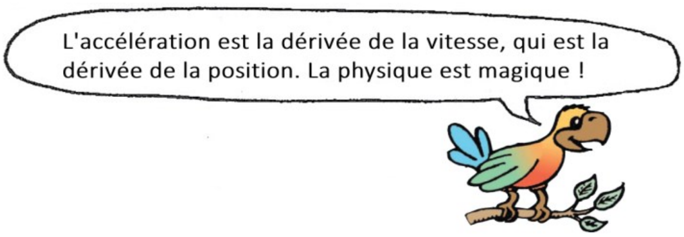
Le **vecteur accélération instantanée** $\vec{a}$ est égal à la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

L'unité SI d'accélération est le mètre par seconde carrée ($\mathrm{m/s^2}$).

Remarque :
Comme le vecteur vitesse est égal à la dérivée du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération est égal à la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$



D'après la définition du vecteur accélération instantanée :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + v_z\,\vec{k}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{k} \\ &= a_x\,\vec{\imath} + a_y\,\vec{\jmath} + a_z\,\vec{k}\end{aligned}$$

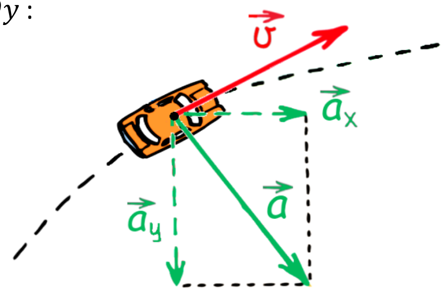
On écrit encore :

$$\vec{a}\left|\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z}\end{aligned}\right.$$

Norme du vecteur accélération instantanée :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Figure pour un mouvement s'effectuant dans le plan xOy :



As-tu compris ?

1. Un point M se déplace en ligne droite. L'équation horaire de sa coordonnée sur l'axe est donnée par $x(t) = 7\,t - 3\,t^2$, où x est exprimé en mètres et t est exprimé en secondes.

a. Déterminer les équations horaires de la vitesse et de l'accélération de M.

b. Calculer la vitesse et l'accélération de M en $t = 4$ s.

2. Le vecteur position d'un mobile M est donné par les équations horaires suivantes :

$$\vec{r}\left|\begin{aligned} x &= 2\,t \\ y &= -2\,t^2 + 4\,t + 4\end{aligned}\right. \qquad \text{(unités SI)}$$

a. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ de M.

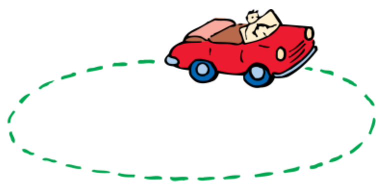
b. Calculer la norme des vecteurs $\vec{r}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à l'instant $t = 2$ s.

c. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Quelle est sa forme ?

d. Représenter la trajectoire de M dans un repère cartésien entre $t = 0$ et $t = 3$ s.
Y ajouter les vecteurs vitesse et accélération à l'instant $t = 2$ s.

2 Mouvement circulaire uniforme (MCU)

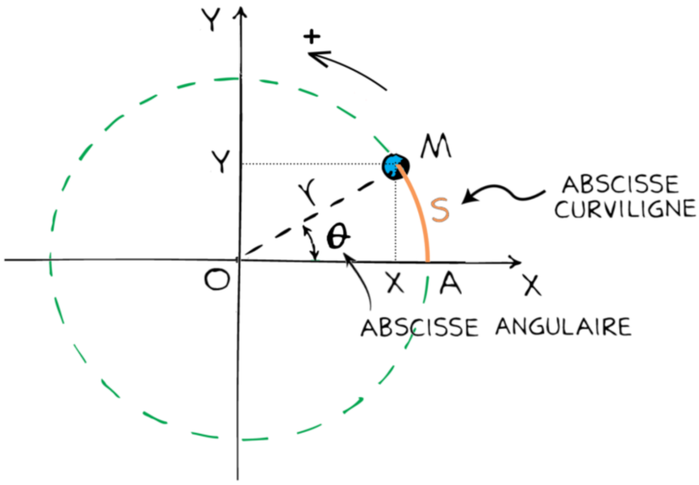
Un mobile est animé d'un **mouvement circulaire uniforme (MCU)**, lorsqu'il se déplace sur une trajectoire circulaire et si la norme de sa vitesse demeure constante. La pointe de l'aiguille des minutes d'une montre ou la nacelle d'une grande roue effectuent par exemple un MCU.



Nous allons nous limiter au cas où le mobile se déplace toujours dans le même sens et fixer un sens de parcours positif dans le sens du mouvement.

2.1 Repérage d'un point sur un cercle

Considérons un point mobile M qui se déplace sur un cercle de centre O et de rayon r :



Il peut être repéré à l'aide de :

- ses coordonnées x et y dans un repère cartésien d'origine O ;
- la mesure algébrique de l'arc de cercle entre un point de référence A et le point mobile M. C'est l'**abscisse curviligne s** ;
- la mesure algébrique de l'angle au centre balayé par le rayon OM entre une position de référence A et la position M du mobile. Cet angle est l'**abscisse angulaire θ** et forme ensemble avec le rayon r les **coordonnées polaires** du mobile.

Les coordonnées polaires sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et à l'abscisse curviligne par la relation[2] :

$$s = r\,\theta$$

dans laquelle il faudra exprimer l'abscisse angulaire θ *en radians*.

[2] En effet, les abscisses curviligne et angulaire sont proportionnelles : $s \sim \theta \Leftrightarrow \frac{s}{\theta} =$ constant
Lorsque M a parcouru un tour complet, $s = 2\pi r$ et $\theta = 2\pi$. La constante de proportionnalité vaut donc $\frac{s}{\theta} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r$. C'est le rayon du cercle.

2.2 Période et fréquence

La **période $\boldsymbol{T}$** d'un MCU est la durée d'un tour complet :

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

Δt : durée nécessaire
N : nombre de tours

L'unité SI de période est la seconde (s).

La **fréquence $\boldsymbol{f}$** d'un MCU est le nombre de tours effectués par unité de temps :

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

N : nombre de tours
Δt : durée nécessaire

L'unité SI de fréquence est le hertz (Hz). On a : 1 Hz = 1 s^{-1}

Par conséquent :

$$f = \frac{1}{T} \text{ ou } T = \frac{1}{f}$$

2.3 Vitesse linéaire

Pour un mobile en MCU, la norme de la vitesse instantanée $\vec{v}$ est constante et égale à la vitesse moyenne. La distance parcourue pendant un intervalle de temps Δt est égale à la variation Δs de l'abscisse curviligne et on a :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

Pour un tour complet $\Delta s = 2\pi\, r$ et $\Delta t = T$. Ainsi :

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} \tag{2}$$

S'il y a risque de confusion de cette vitesse avec la vitesse angulaire (voir prochaine section), on l'appelle plus précisément **vitesse linéaire**.

2.4 Vitesse angulaire

La **vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$** indique l'angle au centre balayé par unité de temps. L'unité SI de vitesse angulaire est le radian par seconde (rad/s).

Pour un mobile en MCU, la vitesse angulaire instantanée ω est constante et égale à la vitesse angulaire moyenne. L'angle balayé pendant un intervalle de temps Δt est égal à la variation $\Delta\theta$ de l'abscisse angulaire et on a :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

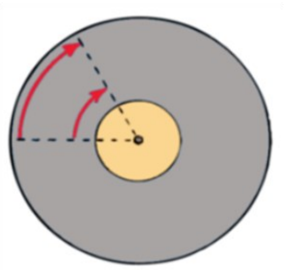
Pour un tour complet, $\Delta\theta = 2\pi$ et $\Delta t = T$. Ainsi :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, f \tag{3}$$

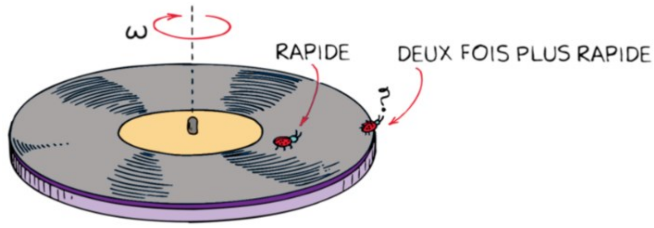
En comparant (2) dans (3), on obtient une *relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire* :

$$v = r\,\omega$$

À titre d'exemple, considérons un disque vinyle en rotation sur un tourne-disque. Un point situé au bord du disque parcourt une plus grande distance durant la même durée qu'un point situé plus au centre et aura donc une plus grande vitesse linéaire. En revanche, tous les points du disque balaient le même angle au centre pendant la même durée et auront donc la même vitesse angulaire.



Lorsqu'un disque tourne, un point plus loin du centre parcourt une plus grande distance dans le même temps et avec une vitesse linéaire plus élevée.



Une coccinelle deux fois plus éloignée du centre se déplace deux fois plus vite

■ **As-tu compris ?**

3. La longueur de l'aiguille des heures d'une montre mesure la moitié de celle des minutes. Le rapport entre les vitesses linéaires des pointes respectives vaut :

A. 120 B. 120^{-1} C. 12 D. 60 E. Aucune des réponses précédentes

4. Un disque tourne à raison de 15 tours par minute. Déterminer sa fréquence de rotation et sa vitesse angulaire en unités SI.

2.5 Équations horaires

Considérons un mouvement circulaire uniforme avec les conditions initiales que l'abscisse curviligne $s = s_0$ et que l'abscisse angulaire $\theta = \theta_0$ à l'instant $t = 0$.

En partant de l'expression de la vitesse linéaire $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t}$, on trouve l'équation horaire de l'abscisse curviligne :

$$s(t) = v\,t + s_0$$

En partant de l'expression de la vitesse angulaire $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t}$, on trouve l'équation horaire de l'abscisse angulaire :

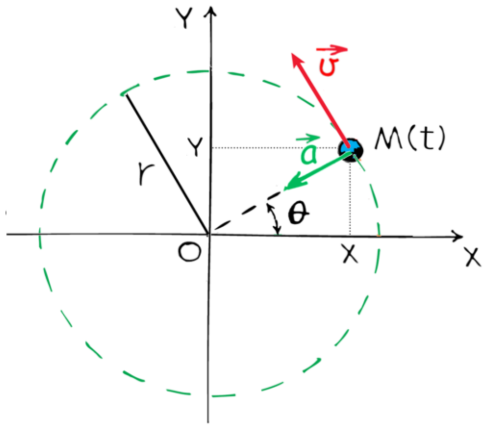
$$\theta(t) = \omega\,t + \theta_0$$

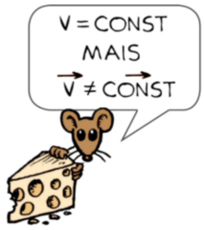
Pour un MCU, l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire augmentent linéairement avec le temps.

2.6 Accélération centripète

Pour un MCU, la norme du vecteur vitesse ne change pas. Cependant, la direction du vecteur vitesse change en permanence. Comme toute variation temporelle du vecteur vitesse constitue une accélération, *un mobile en MCU est accéléré !*

Considérons un mobile animé d'un MCU de rayon r, de vitesse linéaire v et de vitesse angulaire ω :





Soit θ l'abscisse angulaire du mobile avec la condition initiale que $\theta = \theta_0 = 0$ à l'instant $t = 0$. L'équation horaire de l'abscisse angulaire s'écrit : $\theta(t) = \omega\, t$

Vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r}\left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta = r\cos(\omega\, t) \\ y = r\sin\theta = r\sin(\omega\, t) \end{array} \right.$$

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}\left| \begin{array}{l} v_x = \dot{x} = -r\,\omega\,\sin(\omega\, t) \\ v_y = \dot{y} = r\,\omega\,\cos(\omega\, t) \end{array} \right.$$

Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}\left| \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} = -r\,\omega^2\,\cos(\omega\, t) = -\omega^2\, x \\ a_y = \ddot{y} = -r\,\omega^2\,\sin(\omega\, t) = -\omega^2\, y \end{array} \right.$$

D'où : $\vec{a} = -\omega^2\,\vec{r} = \vec{a}_n$

Le mouvement étant uniforme, l'accélération ne comporte pas de composante tangentielle au mouvement. Elle ne comporte qu'une composante $\vec{a}_n$ normale au mouvement qui assure le changement de direction du vecteur vitesse. Puisque l'accélération montre toujours vers le centre de la trajectoire circulaire, on l'appelle encore **accélération centripète**.

La norme de l'accélération centripète d'un MCU s'écrit :

$$a = a_n = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r} \tag{4}$$

Logiciel de courbes paramétrique 3D :
https://www.math3d.org/motion

2.7 Force centripète

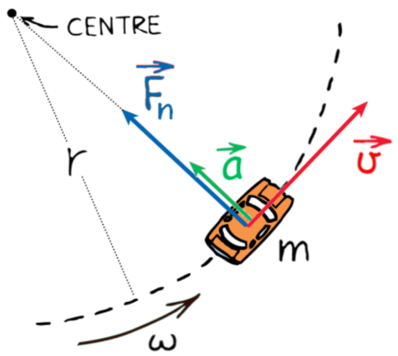
D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération centripète d'un mobile de masse m en MCU est causée par une résultante de forces extérieures $\vec{F}_{res}$ qui est également centripète :

$$\vec{F}_{res} = m\,\vec{a} = m\,\vec{a}_n = \vec{F}_n$$

C'est cette **force centripète,** notée $\vec{F}_n$, qui oblige le mobile à rester sur une trajectoire circulaire. En utilisant l'expression (4), la norme de la force centripète s'écrit :

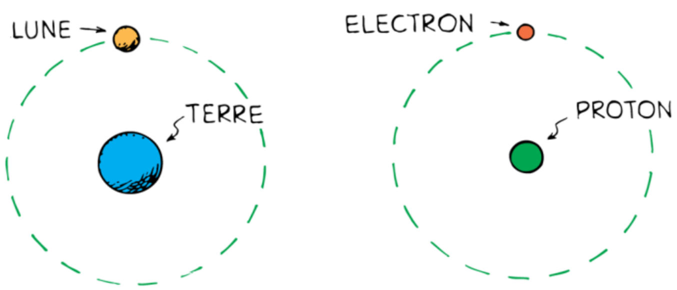
$$F_n = m\,\omega^2\,r = m\,\frac{v^2}{r}$$

où r est le rayon de la trajectoire circulaire, ω la vitesse angulaire du mobile et v sa vitesse linéaire.

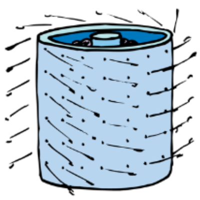


La force centripète n'est pas une force fondamentale de la Nature, mais elle désigne toute force qui est dirigée vers le centre d'une trajectoire circulaire :

- Lorsqu'on fait tourner une boîte dans un plan horizontal, la force centripète correspond à la tension (supposée également horizontale) du fil.
- La force centripète qui contraint la Lune à rester sur son orbite (approximativement) circulaire autour de la Terre correspond à la force de gravitation exercée par la Terre sur la Lune.
- La force centripète qui contraint les électrons à suivre une trajectoire circulaire autour du noyau atomique correspond à la force électrique exercée par le noyau sur les électrons.



- Lorsqu'une voiture prend un virage, la force centripète qui assure la courbure de sa trajectoire correspond à la force de frottement que la route exerce sur les pneus de la voiture.
- Dans une machine à laver, le tambour tourne à grande vitesse et exerce une force centripète sur les vêtements mouillés, leur imposant une trajectoire circulaire. Les trous dans le tambour empêchent l'action de cette même force sur l'eau : elle s'échappe tangentiellement par les trous.



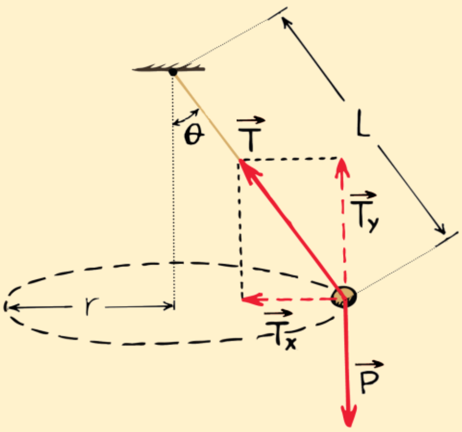
Exercice résolu

Une bille en acier de masse 80 g est fait tourner à l'aide d'un fil de longueur 60 cm dans un plan horizontal. Le fil est alors incliné d'un angle de 30° par rapport à la verticale. Calculer :

a. la vitesse linéaire de la bille

b. la norme de la force centripète

Solution :



a. Bilan des forces extérieures :

- $\vec{P}$: poids de la bille
- $\vec{T}$: tension du fil

D'après le PFD :

$$\vec{F}_{res} = m\,\vec{a}$$

Puisqu'il s'agit d'un MCU, $\vec{F}_{res} = \vec{F}_n$ et $\vec{a} = \vec{a}_n$ et il vient :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}_n$$

Projection sur l'axe vertical :

$$-P + T\cos\theta = 0 \Leftrightarrow T\cos\theta = mg \quad (*)$$

Projection sur l'axe radial :

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad (**)$$

En divisant (**) par (*) :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\,r} \Leftrightarrow v^2 = g\,r\tan\theta$$

En utilisant que $r = L\sin\theta$ et en prenant la racine carrée, il vient :

$$v = \sqrt{g\,L\sin\theta\tan\theta}$$

A.N. : $v = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}60 \cdot \sin 30° \cdot \tan 30°} = 1{,}30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

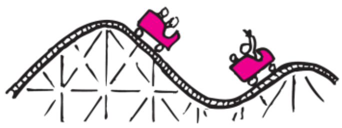
b. Force centripète :

$$F_n = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{L\,\sin\theta} = 0{,}080\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\left(1{,}30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}60\,\mathrm{m} \cdot \sin 30°} = 0{,}45\,\mathrm{N}$$

3 Mouvement curviligne

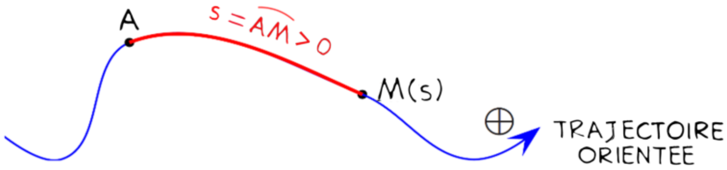
3.1 Abscisse curviligne

Lorsque la trajectoire d'un mobile est connue d'avance, la position du mobile peut être définie par rapport à la trajectoire. Le concept de l'abscisse curviligne qu'on a déjà introduit pour un mouvement circulaire se laisse généraliser :



L'**abscisse curviligne** s d'un mobile est la mesure algébrique du chemin parcouru sur la trajectoire entre une origine A et la position du point mobile M :

$$s = \overset{\frown}{AM}$$

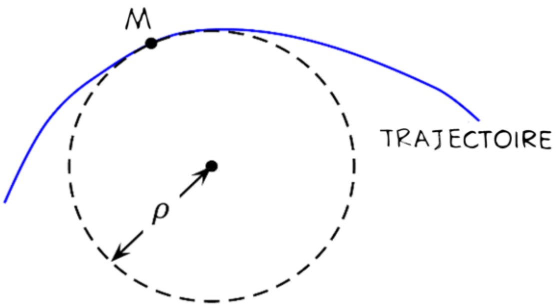


L'origine A et le sens de parcours positif peuvent être choisis arbitrairement.

Application pratique : Une voiture en panne sur l'autoroute peut être repérée en connaissant le point kilométrique auquel elle se trouve.

3.2 Rayon de courbure

La courbure d'une trajectoire renseigne sur la façon dont la forme de la trajectoire dévie d'une ligne droite. Pour caractériser la courbure de la trajectoire en un point M, on peut considérer le rayon du cercle qui s'approche le mieux à la forme de la trajectoire en M.



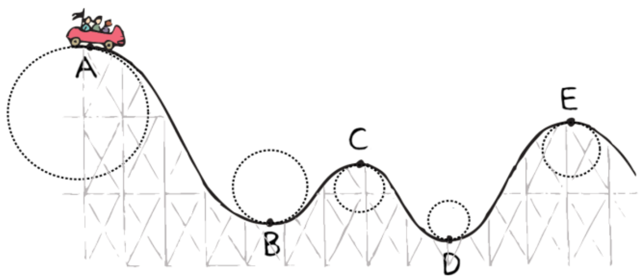
Ce cercle porte le nom de **cercle de courbure** ou **cercle osculateur**[3]. Son centre et son rayon, noté ρ, sont respectivement appelés **centre de courbure** et **rayon de courbure**. Le rayon de courbure en un point est d'autant plus petit que la trajectoire y est incurvée. Si la trajectoire est rectiligne, le rayon de courbure est infini. Si le mouvement est circulaire, le rayon de courbure est égal au rayon de la trajectoire circulaire.

As-tu compris ?

5. Considérer la trajectoire du wagon les points A, B, C, D et E.

a. La trajectoire est-elle plus incurvée en B ou en D ? Justifier.

b. En quelle point la trajectoire est-elle la moins incurvée ? Justifier.

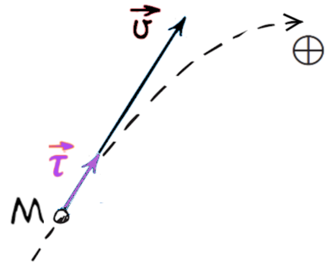


[3] Du nom latin *circulus osculans* donné par Gottfried Leibniz, littéralement le cercle qui embrasse [la courbe].

3.3 Relation entre vitesse et abscisse curviligne

Puisque le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est porté par la tangente à la trajectoire, on peut écrire :

$$\vec{v} = v_\tau\,\vec{\tau}$$



où v_τ désigne la coordonnée tangentielle de la vitesse et $\vec{\tau}$ un vecteur unitaire[4] tangentiel au mouvement et orienté dans le sens positif de la trajectoire.

La coordonnée v_τ est une grandeur algébrique :

- $v_\tau = v > 0$ si le mobile se déplace dans le sens positif de la trajectoire ;
- $v_\tau = -v < 0$ si le mobile se déplace dans le sens contraire.

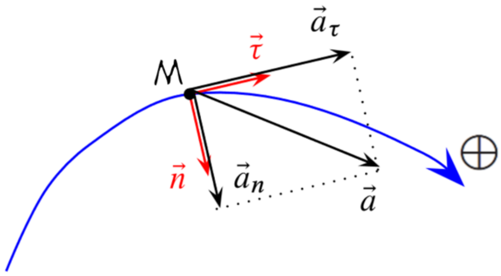
Ainsi $|v_\tau| = v$. Par généralisation de l'expression (1) à un mouvement non uniforme se poursuivant dans un sens quelconque de la trajectoire, il vient :

$$v_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

La valeur algébrique de la vitesse est égale à la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps.

3.4 Accélération tangentielle et accélération normale

Comme vu en classe de 2e, le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$ possède en général une composante $\vec{a}_\tau$ tangentielle au mouvement (colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}$) et une composante $\vec{a}_n$ normale au mouvement (perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$) :



En introduisant des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ qui sont respectivement tangentiel et normal au mouvement, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\,\vec{\tau} + a_n\,\vec{n} \tag{5}$$

L'**accélération tangentielle** renseigne sur la variation de la valeur algébrique de la vitesse. Elle est égale à la dérivée de la coordonnée tangentielle de la vitesse par rapport au temps :

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_\tau$$

- Si $a_\tau = 0$, la valeur algébrique de la vitesse a atteint un maximum ou un minimum ou elle est constante (*Mouvement uniforme*).
- Si $a_\tau > 0$, alors v_τ augmente. Si $a_\tau < 0$, alors v_τ diminue.
- Pour un mouvement qui se poursuit dans le sens positif de la trajectoire, v_τ peut être remplacé par la norme v du vecteur vitesse.

---

[4] Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1. En l'occurrence, $||\vec{\tau}|| = 1$.

- Si a_τ et v_τ ont même signe, $\vec{a}_\tau$ et $\vec{v}$ sont de même sens et la norme v du vecteur vitesse augmente. (*Mouvement accéléré*)
- Si a_τ et v_τ sont de signes opposés, $\vec{a}_\tau$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés et la norme v du vecteur vitesse diminue. (*Mouvement décéléré / retardé*)

Comme la coordonnée tangentielle de vitesse est égale à la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps, l'accélération tangentielle est égale à la dérivée seconde de l'abscisse curviligne par rapport au temps :

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

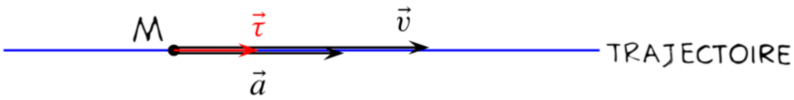
L'**accélération normale** renseigne sur la variation de la direction de la vitesse. Elle s'écrit :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Si $a_n = 0$, la direction de la vitesse reste constante ; le rayon de courbure ρ est infini. (*Mouvement rectiligne*)
- Si $a_n > 0$, la direction de la vitesse change. Pour une norme de vitesse donnée, a_n est d'autant plus grand que ρ est petit c.-à-d. que la trajectoire est incurvée. (*Mouvement curviligne*)
- Pour ρ donné, a_n est d'autant plus grand que la norme v du vecteur vitesse est grande.

Cas particuliers :

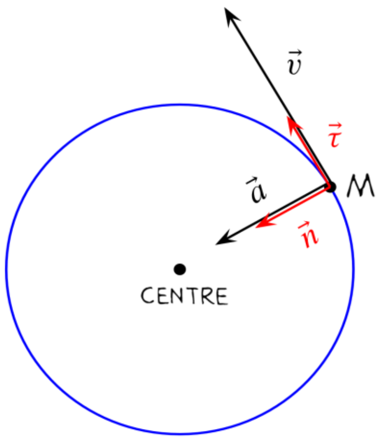
- Lors d'un mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV), l'accélération n'a qu'une composante tangentielle puisque seule la norme de la vitesse varie, la direction de la vitesse demeurant constante :



- Lors d'un mouvement circulaire uniforme (MCU), l'accélération n'a qu'une composante normale puisque seule la direction de la vitesse varie, la norme de la vitesse demeurant constante. En d'autres mots, l'accélération d'un mobile en MCU est centripète. Le rayon de courbure étant égal au rayon de la trajectoire circulaire, on a :

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r}$$

en accord avec la relation (4) p. 7.



As-tu compris ?

6. Sous quelle condition l'accélération tangentielle est-elle nulle ?

7. Sous quelle condition l'accélération normale est-elle nulle ?

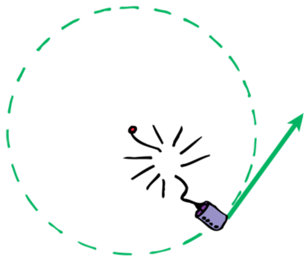
4 Pour en savoir plus

4.1 « Force » centrifuge

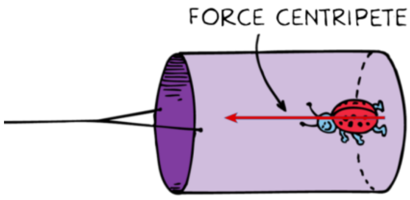
Lorsqu'un bus s'arrête brusquement, un passager debout trébuche vers l'avant. Il a l'impression de subir une force accélératrice. Pourtant, il n'y a aucune vraie force qui le tire vers l'avant. D'après le principe d'inertie, le passager trébuche vers l'avant à cause de l'absence de force qui le retiendrait (qui serait exercée par une ceinture de sécurité).

Similairement, un observateur à l'intérieur d'un système en rotation sent une force apparente qui le tire vers l'extérieur, appelée **force centrifuge**. Par exemple, si on se trouve dans une voiture qui prend un virage brusque vers la gauche, on a l'impression d'être poussé vers la droite. Or, un observateur lié au sol terrestre conclut qu'il n'y a pas de force centrifuge qui nous tire vers la droite, mais absence d'une force centripète dirigée vers la gauche qui nous maintiendrait sur la trajectoire circulaire.

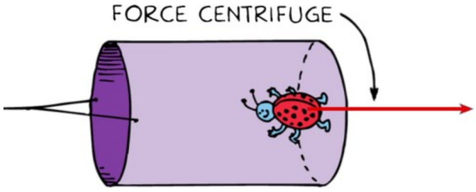
De même, lorsqu'on fait tourner une canette au bout d'une corde sur une trajectoire circulaire, une force centripète exercée par la corde tire la canette vers le centre de la trajectoire circulaire. Aucune force centrifuge ne tire la canette vers l'extérieur. Lorsque la corde rompt, la canette s'envole en ligne droite, tangentiellement à la trajectoire circulaire.



Supposons qu'une coccinelle se trouve à l'intérieur de la canette. La canette exerce contre les pieds de la coccinelle une poussée qui constitue la force centripète et qui la maintient sur la trajectoire circulaire. D'après le principe d'action-réaction, la coccinelle pousse à son tour contre le sol de la canette. Dans le **référentiel terrestre**, nous n'identifions aucune force centrifuge sur la coccinelle.



Dans le **référentiel accéléré de la canette**, les choses paraissent différentes. La coccinelle y apparait au repos. La résultante des forces qu'elle subit devant être nulle, elle conclut qu'elle subit à la fois une force centripète (exercée par la canette) et une force centrifuge de même norme qui l'attire vers le fond de la canette. La coccinelle ressent la force centrifuge comme une force toute aussi réelle que le poids.



Il y a cependant une différence fondamentale entre la force centrifuge et le poids de la coccinelle. Le poids est une interaction entre sa masse et celle de la Terre. La force centrifuge n'a en revanche pas de contrepartie en interaction. L'effet centrifuge ressenti n'est pas causé par une force réelle, mais par l'inertie – la tendance d'un corps en mouvement à suivre une trajectoire rectiligne. Pour cette raison, les physiciens appellent la force centrifuge une **force inertielle**.

4.2 Établissement des expressions des accélérations tangentielle et normale

En utilisant la définition du vecteur accélération et le fait que la vitesse s'écrit $\vec{v} = v_\tau \, \vec{\tau}$, on obtient pour le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v_\tau \, \vec{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} \, \vec{\tau} + v_\tau \, \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Le vecteur $\vec{\tau}$ étant unitaire, on a :

$$\vec{\tau}^2 = 1 \Longrightarrow 2 \, \vec{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Le produit scalaire entre les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ étant nul, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \perp \vec{\tau} \tag{7}$$

Puisque $\vec{\tau}$ est dirigé perpendiculairement au rayon de courbure ρ, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ tournent avec la même vitesse angulaire ω. D'où :

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \right\| = \omega = \frac{v}{\rho} \tag{8}$$

En utilisant (7) et (8), on conclut que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho} \, \vec{n} \tag{9}$$

En remplaçant dans (6) et en supposant que le déplacement se poursuit dans le sens positif de la trajectoire de sorte que $v_\tau = v$, il vient finalement :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} \, \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \, \vec{n}$$

5 Exercices

1. Le vecteur position d'un mobile M est donné par les équations horaires suivantes :

$$\vec{r}\left|\begin{array}{l} x = 4\cos\, t \\ y = 4\, \sin\, t \end{array}\right. \qquad \text{(unités SI)}$$

a. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M.

b. S'agit-il d'un mouvement uniformément varié ? Justifier.

c. Représenter la trajectoire de M entre $t = 0$ et $t = 2\pi$ s .

Y ajouter les vecteurs vitesse et accélération aux instants $t = 0$ s, $\frac{\pi}{2}$ s, π s, $\frac{3\pi}{2}$ s et 2π s.

2. Lorsqu'on double la période de rotation, la vitesse angulaire…

A. double

B. est réduite de moitié

C. reste constante

D. aucune des réponses précédentes

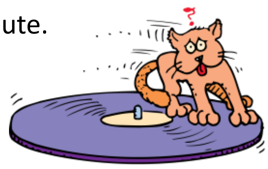
3. Le moteur d'une foreuse tourne à 2700 tours/min. Calculer :

a. sa fréquence

b. sa période

c. sa vitesse angulaire

4. Un disque LP, de diamètre 35 cm, tourne à raison de $33\,\frac{1}{3}$ tours par minute.

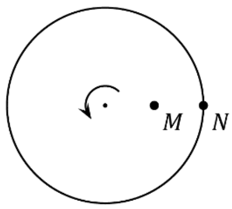


a. Calculer sa vitesse angulaire de rotation en rad/s.

b. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à la périphérie du disque.

c. Déterminer la norme de l'accélération de ce même point.

5. Deux points M et N d'un disque qui tourne à fréquence constante sont situés tels que le rapport de leurs distances au centre vaut 2.



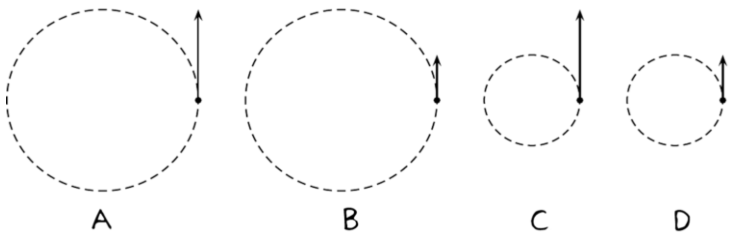
a. Quelle affirmation concernant leur vitesse linéaire v et leur vitesse angulaire ω est correcte ?

	v	ω
A	la même	la même
B	différentes	la même
C	la même	différentes
D	différentes	différentes

b. Quel est le rapport entre l'accélération de N et l'accélération de M.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

6. Dans lequel des exemples de MCU suivants l'accélération centripète du point mobile est-elle la plus grande ? Justifier. La flèche représente à chaque fois le vecteur vitesse.

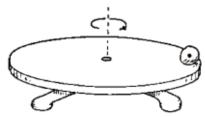


7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   a. Dans un mouvement circulaire, le vecteur accélération est toujours dirigé vers le centre du cercle décrit.
   b. Lors d'un mouvement uniforme, on a toujours $\vec{a} = \vec{0}$.
   c. Si le centre de gravité d'un solide est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors la valeur de sa vitesse est constante et son vecteur accélération est nul.
   d. Lors d'un mouvement circulaire, le vecteur accélération tangentiel $\vec{a}_T$ peut être dirigé en sens inverse du mouvement.
   e. Un mouvement pour lequel le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont constants est impossible.

8. Un enfant est assis sur un manège qui tourne uniformément à raison de 6 tours par minute. Le centre de rotation O du manège se trouve à 4 m de l'enfant. On assimile l'enfant à un point mobile M.
   a. Calculer la vitesse linéaire et la vitesse angulaire.
   b. Calculer la norme de l'accélération centripète.
   c. Écrire les équations horaires de l'abscisse angulaire θ, sachant que $\theta(t = 0) = \theta_0 = 45°$.

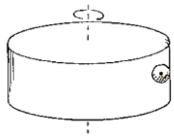
9. Une voiture de course sur une piste circulaire horizontale reste sur la route grâce au frottement entre les pneus et la route. Si la vitesse de la voiture double, la force de frottement nécessaire
   A. est identique
   B. double
   C. diminue de moitié
   D. est quatre fois plus grande

10. Une pierre repose sur une plateforme horizontale qui tourne avec une vitesse angulaire constante autour de son axe vertical passant par son centre. Le frottement empêche la pierre de glisser.



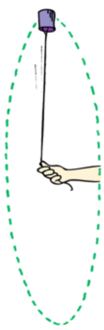
   a. Représenter sur une figure toutes les forces qui agissent sur la pierre.
   b. Identifier la force centripète.

11. Mêmes questions pour une pierre maintenue sur une trajectoire circulaire horizontale grâce au frottement avec la paroi intérieure du tambour en rotation rapide.



12. Calculer la force de frottement qui maintient une personne de 75 kg au bord d'une plateforme horizontale en rotation lorsque la personne est assise à 2 m du centre de la plateforme et a une vitesse linéaire de 3 m/s.

13. On fait tourner une canette de 100 g à l'aide d'une ficelle de 100 cm (masse négligeable) sur une trajectoire circulaire dans un plan vertical. La vitesse angulaire de la canette vaut 5 rad/s.



   a. Calculer la tension du fil au point le plus bas et au point le plus haut de la trajectoire. Utiliser $g = 10\ \mathrm{N/kg}$.
   b. Représenter le poids de la canette ainsi que la tension du fil au sommet et au point le plus bas de la trajectoire en utilisant l'échelle 1 cm : 1 N.
   c. En quel point la ficelle risque-t-elle de rompre en premier ? Justifier.
   d. Calculer la vitesse linéaire minimale pour que le fil reste continuellement tendu au cours du mouvement.

Crédits Photos

© Wolfilser / Shutterstock.com (219615730) – **page titre** (chaises volantes)

Crédits Illustrations

Des remerciements particuliers sont adressés à Paul G. HEWITT. Les illustrations sont, sauf indication contraire, l'œuvre de Paul G. Hewitt et des auteurs du cours. Les illustrations de Paul G. HEWITT ont été retravaillées par Laurent HILD, avec l'autorisation écrite et personnelle de l'auteur. Les illustrations originales sont des livres :

© HEWITT, Paul G., *Conceptual physics*, 2015, Pearson

© HEWITT, Paul G., SUCHOCKI John, *Conceptual physical science – Practice Book*, 2012, Pearson

© EPSTEIN Lewis C., HEWITT, Paul G., *Thinking Physics* – 1981, Insight Press